

**CBPF**

---

**Centro Brasileiro de  
Pesquisas Físicas**

**A Energia Entre Partículas e o Efeito Casimir  
Através de Fontes e Potenciais Externos  
Acoplados à Campos Bosônicos**

**Tese de Doutorado**

**Frederico Eduardo Barone Rangel**

**Orientador: Antonio Accioly**

Rio de Janeiro, 2016

*À minha família.*

## Agradecimentos

- Aos amigos do CBPF, pela colaboração e atenção.
- Aos funcionários do CBPF, por todo inestimável trabalho.
- À CAPES e à FAPERJ, pelo apoio financeiro.
- Ao meu orientador, professor Antonio Accioly, por sua inesgotável paciência.
- Aos meus avós José e Nair Barone, por tudo que representam.
- À Rejane Silva, por toda sua solidariedade.
- À minha mãe Celina Maria Barone, minha sempre presente fonte de motivação, por tudo que sou.
- Ao meu professor, amigo e irmão Fabricio Augusto Barone Rangel com toda admiração. Sem seu apoio incondicional meu trabalho não teria sido possível.
- À minha filha Ludmila Soares Barone Rangel, minha maior fonte de felicidade, por ter alterado toda a escala de valores de minha vida.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial interpartículas em modelos eletromagnéticos <math>D</math>-dimensionais</b>	<b>18</b>
2.1	Introdução . . . . .	18
2.2	Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial $D$ -dimensional interpartículas em modelos electromagnéticos . . . . .	20
2.3	Encontrando $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ através de nossa prescrição . . . . .	22
2.4	Potencial $D$ -dimensional para uma extensão do modelo padrão na qual a eletrodinâmica não massiva $U(1)_{\text{QED}}$ é acoplada a um setor escondido $U(1)_h$ . . . . .	25
2.5	$E_D$ para a eletrodinâmica de Lee-Wick . . . . .	34
2.6	Considerações finais . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial <math>D</math>-dimensional em sistemas gravitacionais</b>	<b>47</b>
3.1	Introdução . . . . .	47
3.2	Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial em modelos gravitacionais $D$ -Dimensionais . . . . .	48
3.3	$E_D$ para modelos gravitacionais $D$ -dimensionais com derivadas de ordem superior . . . . .	51
3.3.1	$D > 3$ . . . . .	56
3.3.2	$D = 3$ . . . . .	58

3.4	Encontrando a amplitude de Feynman não relativística $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ através da nossa prescrição . . . . .	58
3.5	Considerações Finais . . . . .	61
3.A	A Constante de Einstein $D$ -dimensional . . . . .	64
3.B	Operadores de Barnes-Rivers $D$ -dimensionais . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Propagação dispersiva do fóton em gravidade com derivadas de ordem superior</b>	<b>68</b>
4.1	Introdução . . . . .	68
4.2	Solução geral para as equações de campo da gravidade linearizada com derivadas de ordem mais alta no calibre de Teysandier . . . . .	71
4.3	A propagação dispersiva do fóton . . . . .	74
4.4	Um limite superior para $ \beta $ . . . . .	76
4.5	Considerações finais . . . . .	79
<b>5</b>	<b>A descrição do efeito Casimir através de potenciais eletromagnéticos</b>	<b>83</b>
5.1	Introdução . . . . .	83
5.2	A modificação do propagador do fóton devido a presença de uma placa . . . . .	84
5.3	O método das imagens . . . . .	89
5.4	A modificação do propagador do fóton entre duas placas . . . . .	92
5.5	A energia de Casimir . . . . .	95
5.6	Considerações finais . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>104</b>

# Resumo

Dois estudos em Teoria Quântica de Campos são realizados. O primeiro contempla as teorias de Ordem Superior, que são ferramentas eficientes e bem conhecidas no trato com as divergências que usualmente infestam no ultravioleta modelos eletromagnéticos e gravitacionais. Neste espírito é construída uma prescrição bastante simples para o cômputo da energia potencial interpartículas em D dimensões, tanto para modelos eletromagnéticos quanto gravitacionais. Este método converte a difícil tarefa de calcular este potencial em um exercício algébrico trivial. A energia potencial D-dimensional é então calculada para uma bem conhecida extensão do modelo padrão na qual a eletrodinâmica sem massa  $U(1)_{\text{QED}}$  está acoplada ao setor escondido  $U(1)_{\text{h}}$ , para o modelo de Lee-Wick e para a interação de duas massas estáticas no contexto da gravitação de ordem superior. Analisa-se também o espalhamento de um fóton por um campo gravitacional de ordem superior e determina-se um limite superior para a constante relacionada ao setor  $R_{\mu\nu}$  da teoria. Este limite melhora aquele disponível na literatura em treze ordens de grandeza. O outro estudo foca a descrição do efeito Casimir por potenciais eletromagnéticos.

**Palavras-chave:** Potências eletromagnéticas e gravitacionais em D dimensões; propagação dispersiva de fótons no contexto da gravitação de ordem superior; efeito Casimir.

**Áreas de conhecimento:** Teoria Quântica de Campos; Gravitação; Teorias de Ordem Superior.

# Abstract

Two studies in the framework of quantum field theory are carried out. The first is devoted to higher derivative theories, which are efficient and well-known tools for dealing with the ultraviolet divergences that usually plague both electromagnetic and gravitational models. In this vein, a very simple prescription for computing the D-dimensional interparticle potential energy for both electromagnetic and gravitational models, is built out. This method converts the hard task of calculating this potential in a trivial algebraic exercise. The D-dimensional potential energy is then computed for a well-known extension of the standard model in which the massless electrodynamics  $U(1)_{\text{QED}}$  is couples to the hidden sector  $S(1)_h$ , for the Lee-Wick model, and for the interaction of two static masses into the context of higher-derivative gravity. We also analyze the scattering of a photon by higher-derivative gravity field and compute an upper bound on the constant related to the sector  $R_{\mu\nu}^2$  the theory. This limit improves that available in the literature by thirteen orders of magnitude. The remaining study focus on the description of Casimir effect by electromagnetic potentials.

# Capítulo 1

## Introdução

A construção de eletrodinâmicas regularizadas via a introdução de derivadas de ordem mais alta, foi considerada por Bopp [1], Landé [2, 3, 4] e Podolsky [5, 6, 7, 8], há muito tempo atrás. Hodiernamente este método é empregado na regularização de teorias tanto de gauge [9] como supersimétricas [10]; derivadas de ordem superior são também um ingrediente comum em teoria de cordas [11].

É interessante lembrar que para evitar divergências inerentes a QED em pequenas distâncias ou, equivalentemente, em altas energias, introduz-se, por exemplo, um cutoff que torna a massa e a carga do elétron finitas. De fato, considere neste espírito o esquema de regularização de Pauli-Villars utilizado com o intuito de se obter a auto-energia do elétron. Esta prescrição consiste em se utilizar um *cutoff* nas integrais supondo a existência de uma partícula de massa pesada  $m$ . O propagador se modifica como abaixo

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} \rightarrow \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} \frac{m^2}{k^2 - m^2} = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - m^2}. \quad (1.1)$$

Por outro lado, a massa da partícula está relacionada ao cutoff  $l$  — o qual doma os infinitos da teoria —, através da relação  $l = \frac{1}{m}$ . A medida que o cutoff vai a zero, a massa da partícula auxiliar tende para infinito de modo que o férmion não físico se desacopla do sistema. O resultado acima mostra claramente que uma teoria eletromagnética que tivesse um propagador igual

àquele dado por (1) teria necessariamente um comportamento melhor em pequenas distâncias que a QED usual. Por outro lado, é fácil mostrar que após adicionar a Lagrangiana fixadora de gauge,  $\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$ , onde  $\lambda$  é um parâmetro de gauge, à Lagrangiana que define a teoria de Lee-Wick [12, 13], ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

o resultante propagador,

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left( 1 + \lambda \left( \frac{k^2 - m^2}{m^2} \right) \right) \right],$$

coincide com (1) se este último for contraído com correntes conservadas. Consequentemente, o termo de ordem mais alta da Lagrangiana de Lee-Wick modifica a Lagrangiana de Maxwell somente em pequenas distâncias, melhorando assim seu comportamento ultravioleta.

Infelizmente, existe um preconceito disseminado contra teorias de ordem mais alta. Realmente, muitos físicos têm uma forte, porém injusta, prevenção em relação a esses modelos. Em geral, dois argumentos são invocados para desfazer-se dos mesmos:

- A. Sistemas de ordem mais alta são sempre infestados por fantasmas.
- B. O teorema *no-go* de Ostrogradski.

Procuraremos em sequência clarificar estas questões.

### **Desmistificando a ideia errada que todos os modelos de ordem mais alta são assombrados por fantasmas**

Ao contrário da crença popular, nem todos os sistemas com derivadas de ordem mais alta são infectados por fantasmas. Os exemplos que se seguem mostram que a ideia de que modelos de ordem mais alta são sempre assombrados por fantasmas é falaciosa. Restringiremos nossa

discussão a modelos gravitacionais e eletromagnéticos com derivadas de ordem superior a fim de evitarmos termos prolixos

*Modelos gravitacionais com derivadas de ordem mais alta*

Em (2+1) dimensões, o modelo BHT (“nova gravitação massiva”), que é definido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[ -\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left( R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) \right],$$

onde  $\kappa^2 = 4\kappa_3$ , com  $\kappa_3$  sendo a constante de Einstein em (2 + 1) dimensões, e  $m_2 (> 0)$  é um parâmetro de massa, não possui *ghosts* ao nível de árvore [14, 15, 16, 17]. É bastante interessante que a teoria de gravitação  $R + R^2$  em  $(N + 1)$  dimensões, ou seja, o modelo definido pela Lagrangiana  $\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{N-2}g} \left[ \frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 \right]$ , onde  $\kappa^2 = 4\kappa_{N+1}$ , com  $\kappa_{N+1}$  sendo a constante de Einstein em  $(N + 1)$  dimensões, e  $\alpha$  é um parametro livre, é também unitária ao nível de árvore [18].

É digno de nota que existem modelos contendo ghosts que são inofensivos. Um interessante exemplo ocorre nos modelos estudados por Sotiriou e Faraoni: as assim chamdas teorias  $f(R)$  de gravitação em (3 + 1) dimensões. Esses autores analisaram esses sistemas ao nível clássico e chegaram a conclusão que “teorias da forma  $f(R, R^2, R_{\mu\nu}^2)$ , contêm, em geral, um campo fantasma massivo de spin 2 além do gráviton sem massa usual e do escalar massivo ” [19]. No entanto, ao nível linear, essas teorias são estáveis [20]. A razão porque elas não explodem é devido ao fato que o fantasma não pode acelerar em virtude da conservação de energia. Outra maneira de se ver isto é através da análise das soluções de onda livres. Conseqüentemente, o modelo de gravitação com derivadas de ordem superior linear definido através da linearização da Lagrangiana

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{-g} \left[ \frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right], \quad (1.3)$$

onde  $\kappa^2 = 4\kappa_4$ , com  $\kappa_4$  sendo a constante de Einstein em (3+1) dimensões, e  $\alpha$  e  $\beta$  são coeficientes livres adimensionais, não está em desacordo com o resultado encontrado por Sotiriou

and Faraoni; de fato, apesar de conter um fantasma massivo de spin 2, como reivindicado por esses pesquisadores, o aludido fantasma não pode causar problemas [21].

Recentemente foi mostrado que pelo menos em casos de *backgrounds* cosmológicos específicos, o fantasma massivo não físico presente no espectro da gravitação com derivadas de ordem superior em  $(3 + 1)$  dimensões não cresce como uma excitação física e permanece no estado de vácuo até a frequência inicial da perturbação se encontrar próxima da escala de Planck. Portanto, modelos de gravitação quântica com derivadas de ordem alta podem ser vistos como teorias de gravitação quântica efetivas bastante satisfatórias abaixo do cutoff de Planck [22].

### *Sistemas eletromagnéticos de ordem mais alta*

Iniciamos nossa análise provando que a eletrodinâmica de Lee-Wick, apesar de estar infestada por um fantasma, é unitária ao nível de árvore em escalas familiares. Para cumprirmos esta tarefa a contento, utilizaremos um método concebido por Veltman [23] e que tem sido intensivamente usado desde sua concepção. A prescrição consiste em saturar o propagador com correntes externas e computar em seguida os resíduos em todos os polos do aludido propagador saturado (*SP*). Se os resíduos nos polos forem positivos ou nulos, o modelo é unitário ao nível de árvore, porém se pelo menos um dos resíduos for negativo, o sistema é não unitário.

O propagador saturado no espaço dos momentos é por sua vez dado por

$$\begin{aligned} SP(k) &= J_\mu(k) D^{\mu\nu}(k) J_\nu(k) \\ &= -\frac{J^\mu(k) J_\mu(k)}{k^2} + \frac{J^\mu(k) J_\mu(k)}{k^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Aqui a corrente externa é conservada.

Vamos então supor que  $k^2 \ll m^2$ . Conseqüentemente,

$$SP(k) = J_\mu J^\mu \left[ -\frac{1}{k^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{m^2}\right).$$

Agora, tendo em mente que

$$\left( J^\mu J_\mu \right) \Big|_{k^2=0} < 0 \text{ (veja Ref.[18]),}$$

chegamos a conclusão que

$$\text{Res}(SP)|_{k^2=0} > 0.$$

Portanto, na escala em apreço, o modelo de Lee-Wick é unitário ao nível de árvore e, como consequência, o fantasma massivo de spin 1 é completamente inofensivo.

Discutimos em sequência a unitariedade ao nível de árvore do modelo com derivadas de ordem mais alta de spin 1 em  $D$  dimensões construído por Dalmazi e Santos [24]. O mencionado sistema é do tipo Maxwell-Proca e é definido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2[\partial H] + \frac{m^2}{2}\left(\partial^\nu H_{\mu\nu}\right)^2 + H_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

onde  $H_{\mu\nu}$  é um tensor simétrico de ordem 2,  $F_{\mu\nu}[\partial H] = \partial_\mu(\partial^\alpha H_{\nu\alpha}) - \partial_\nu(\partial^\alpha H_{\mu\alpha})$ , e  $J^{\mu\nu} = J^{\nu\mu}$  é o termo de corrente externa, corrente esta que não é conservada. Note que se  $J^{\mu\nu} = 0$ ,  $\mathcal{L}$  é invariante sob qualquer transformação local que preserve  $\partial^\alpha H_{\alpha\beta}$ ; como resultado,  $\mathcal{L}$  é invariante sob a transformação de gauge  $\delta_B H_{\mu\nu} = \partial^\sigma \partial^\rho B_{\mu\sigma\rho\nu}$ , tendo os parâmetros de gauge  $B_{\mu\sigma\rho\nu}$  as mesmas simetrias de índices que o tensor de Riemann [25].

Fazendo o termo de fonte igual a zero e adicionando o termo fixador de gauge  $\frac{\lambda}{2}G_{\mu\nu}^2$  à resultante Lagrangiana, onde

$$G_{\mu\nu}(H) = \square H_{\mu\nu} - 2\partial^\alpha \partial_{(\mu} H_{\nu)\alpha} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta H_{\alpha\beta},$$

obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}H^{\mu\nu}O_{\mu\nu,\alpha\beta}H^{\alpha\beta}, \quad (1.6)$$

onde

$$\begin{aligned}
O(k) = & \lambda k^4 P^{(2)} + \frac{k^2}{2}(-k^2 + m^2)P^{(1)} + \lambda k^4 P^{(0-s)} \\
& + k^2((D-1)\lambda k^2 + m^2)P^{(0-w)} \\
& + \sqrt{D-1}\lambda k^4(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}),
\end{aligned}$$

sendo  $\{P^{(2)}, P^{(1)}, P^{(0-s)}, P^{(0-w)}, P^{(0-sw)}, P^{(0-ws)}\}$  o conjunto dos operadores de Barnes-Rivers  $D$ -dimensionais [26].

Segue-se que o propagador no espaço dos momentos assume a forma

$$\begin{aligned}
O^{-1}(k) = & i \left[ \frac{1}{\lambda k^4} P^{(2)} - \frac{2}{k^2(k^2 - m^2)} P^{(1)} + \frac{1}{k^2 m^2} P^{(0-w)} \right. \\
& + \left( \frac{1}{\lambda k^4} + \frac{D-1}{k^2 m^2} \right) P^{(0-s)} - \frac{\sqrt{D-1}}{k^2 m^2} \left( P^{(0-sw)} \right. \\
& \left. \left. + P^{(0-ws)} \right) \right]. \tag{1.7}
\end{aligned}$$

Por outro lado, já que a corrente externa não é conservada, nem  $k_\mu J^{\mu\nu}$  nem  $k_\nu J^{\mu\nu}$  são nulos. Porém, uma vez que a simetria de gauge é tal que  $\delta_B \partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ , a invariância do termo de fonte  $\delta_B \int d^D x H_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = 0$  exige que  $J_{\mu\nu} = \partial_\mu J_\nu + \partial_\nu J_\mu$ , que no espaço dos momentos assume a forma  $J_{\mu\nu}(k) = i(k_\mu J_\nu + k_\nu J_\mu)$ . Segue-se então que o propagador saturado pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
SP(k) & = J_{\mu\nu}^* (D^{-1})^{\mu\nu, \kappa\lambda} J_{\kappa\lambda} \\
& = i J_{\mu\nu}^* \left[ \frac{-2P^{(1)}}{k^2(k^2 - m^2)} + \frac{P^{(0-w)}}{m^2 k^2} \right]^{\mu\nu, \kappa\lambda} J_{\kappa\lambda} \\
& = 4i \left( -\frac{J_\mu^* \theta^{\mu\nu} J_\nu}{k^2 - m^2} + \frac{J_\mu^* \omega^{\mu\nu} J_\nu}{m^2} \right). \tag{1.8}
\end{aligned}$$

A última linha de (8) corresponde exatamente a amplitude de dois pontos do modelo de

Maxwell-Proca com correntes externas não conservadas. Note que o polo em  $k^2 = 0$  se cancela e a parte imaginária do resíduo em  $k^2 = m^2$  é evidentemente positiva [27], o que garante a unitariedade ao nível de árvore desta teoria de Maxwell-Proca com derivadas de ordem mais alta.

Chamamos atenção para o fato que devido a corrente externa no espaço dos momentos relacionada ao exemplo acima envolver explicitamente a presença da unidade imaginária  $i$ , a prescrição de Veltman usada no primeiro exemplo tem de ser reformulada como se segue:

1. Adicione um  $i$  ao propagador.
2. Construa o propagador saturado de acordo com a seguinte receita:

$$SP = (\text{corrente externa})^*(\text{propagador}) (\text{corrente externa}).$$

3. Compute os resíduos em todos os polos da parte imaginária de  $SP$ ; se esses resíduos forem positivos ou nulos, o modelo é unitário ao nível de árvore, mas se pelo menos um deles for negativo, o sistema é não unitário.

### **Desmistificando o teorema no-go de Ostrogradski**

Vamos então discutir a ideia equivocada e bastante comum que modelos com derivadas de ordem mais alta *singulares* podem ser rejeitados apelando-se para o teorema no-go de Ostrogradski. A bem da generalidade considere um sistema com derivadas de ordem mais alta em  $D$  dimensões. De acordo com a crença popular, o teorema de Ostrogradski implica na existência de uma instabilidade linear no Hamiltoniano associado com todos os sistemas providos de derivadas superiores. Esta asserção é completamente falsa. De fato, Ostrogradski somente tratou de modelos não singulares [28]. Portanto, a única maneira de burlar o teorema no-go de Ostrogradski é considerar modelos singulares, o que concorda com a conclusão a que chegou Woodard [29]. Um exemplo interessante a esse respeito é a partícula relativística rígida estudada por Plyushchay [30].

Como é bem conhecido, todos os modelos de gauge com derivadas superiores são singulares; segue-se que eles não podem ser descartados *a priori* pelo teorema de Ostrogradski já que ele

não se aplica aos mesmos. Isto não significa, evidentemente, que eles sejam sempre sistemas desprovidos de fantasmas. Exibimos anteriormente alguns interessantes modelos de gauge com derivadas de ordem mais alta que são unitários ao nível de árvore e obviamente não violam o teorema de Ostrogradski.

Baseados na precedente análise podemos concluir que a presença de derivadas de ordem mais alta é bastante importante em muitos modelos físicos. Além disso, existem sistemas com derivadas de ordem superior desprovidos de fantasmas; e mais, há modelos com fantasmas onde estes são inofensivos, bem como modelos de ordem superior que podem em geral serem considerados como sistemas efetivos bastante satisfatórios abaixo do cutoff the Planck.

Assim sendo vamos nos dedicar neste trabalho a pesquisa de algumas propriedades interessantes tanto dos sistemas eletromagnéticos como gravitacionais com derivadas de ordem superior ou em sua ausência. Alguns dos resultados obtidos podem ser aplicados tanto em situações onde haja a presença destas derivadas como naquelas em que estas derivadas de ordem mais alta não compareçam.

No Capítulo 1 construímos uma prescrição simples para o cômputo da energia potencial interpartículas relacionada com modelos eletromagnéticos em  $D$  dimensões, baseada no funcional gerador [31]. Esta prescrição converte a árdua tarefa de calcular este potencial em um exercício algébrico trivial. Já que este método é equivalente àquele baseado na fusão da mecânica quântica (em ordem principal, ou seja, na primeira aproximação de Born) com o limite não relativístico da teoria quântica de campos, e tendo em mente que o último se apoia basicamente no cômputo da amplitude não relativística de Feynman ( $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ ), uma expressão trivial para o cálculo de  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$  é obtida da prescrição aludida como um bônus adicional. Para testar a eficácia e simplicidade do método, a energia potencial interpartículas em  $D$  dimensões é encontrada para uma bem conhecida extensão do modelo padrão na qual a eletrodinâmica sem massa  $U(1)_{\text{QED}}$  está acoplada ao setor escondido  $U(1)_{\text{h}}$ , bem como para a eletrodinâmica de Lee-Wick.

Uma prescrição bastante simples para o cômputo da energia potencial  $D$ -dimensional de modelos gravitacionais, a qual se baseia fortemente no funcional gerador, é construída no Capítulo

2 [32]. Usando este método, a energia potencial estática em  $D$  dimensões relativa à interação de duas massas é encontrada no contexto de modelos de gravitação com derivadas de ordem mais alta, e seu comportamento é analisado posteriormente tanto em pequenas quanto grande distâncias. Como consequência, dois novos sistemas gravitacionais em que a energia potencial é finita na origem, em  $D = 5$  e  $D = 6$  respectivamente, são encontrados. Tendo em conta que a prescrição em tela é equivalente àquela baseada no casamento entre a mecânica quântica (em ordem principal, ou seja, na primeira aproximação de Born) e o limite não relativístico da teoria quântica de campos, e levando em conta que o último se apoia basicamente no cálculo da amplitude não relativística de Feynman ( $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ ), uma expressão trivial para  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$  é obtida de nossa prescrição como uma vantagem extra.

O espalhamento de um fóton por um campo gravitacional fraco que é solução das equações da gravitação com derivadas superiores linearizada tendo como fonte uma partícula pontual massiva localizada na origem do sistema de coordenadas, é analisado no Capítulo 3 [33]. Mostra-se que o setor  $R_{\mu\nu}^2$  da teoria produz propagação fotônica dispersiva. Subsequentemente, o ângulo  $|\Delta|(\equiv |\theta_{\text{violeta}} - \theta_{\text{vermelho}}|)$  no qual o espectro visível seria espalhado no caso de um fóton passando pelo sol é plotado como uma função da constante  $|\beta|$  relacionada ao setor  $R_{\mu\nu}^2$ . Um limite superior para  $|\beta|$  é então encontrado. É notável que este limite melhore aquele atualmente disponível na literatura em treze ordens de grandeza.

A questão de cargas elétricas em interação com superfícies parcialmente refletoras é enfocada no Capítulo 4 via métodos teóricos de campos [34]. Propomos uma Lagrangiana de Maxwell aumentada, a qual descreve o campo eletromagnético na presença de uma superfície semitransparente, e seu correspondente propagador fotônico é obtido exatamente. O propagador corrigido reduz-se àquela que descreve um condutor perfeito no limite apropriado e leva a interação entre cargas e superfícies com variados graus de transparência, caracterizada por um parâmetro fenomenológico. A interação encontrada através do método das imagens é recuperada no caso limite de um espelho perfeito, o que atesta a validade do método. Utilizando o modelo formulado acima para superfícies dielétricas semitransparentes acopladas ao campo eletromagnético por meio de um potencial efetivo, consideramos uma estrutura formada por

dois espelhos diferentes, e computamos exatamente a correção sofrida pelo propagador do fóton devida a presença de ambos os pratos [35]. Este novo propagador é contínuo em todo o espaço e, no limite apropriado, coincide com àquele usado para para descrever o efeito Casimir entre condutores perfeitos. A função de Green corrigida é então usada para calcular a energia de Casimir entre superfícies dieléticas uniaxiais descritas pelo modelo, e faz-se uma análise numérica com o intuito de enfatizar o comportamento peculiar da interação entre os espelhos.

Finalizamos apresentando no Epílogo uma discussão sobre os resultados obtidos e apresentamos possíveis aplicações dos mesmos.

Ao longo de todo o trabalho utilizamos unidades naturais. A métrica, por sua vez, tem assinatura  $(+, -, -, \dots, -)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] P. Bopp, Ann. Phys. **38**, 345 (1940).
- [2] A. Landé, Phys. Rev. **60**, 121 (1941).
- [3] A. Landé and L. Thomas, Phys. Rev. **60**, 514 (1941).
- [4] A. Landé and L. Thomas, Phys. Rev. **65**, 175 (1944).
- [5] B. Podolsky, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
- [6] B. Podolsky and C. Kikuchi, Phys. Rev. **65**, 228 (1944).
- [7] B. Podolsky and C. Kikuchi, Phys. Rev. **67**, 184 (1945).
- [8] B. Podolsky and P. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).
- [9] L. Faddeev and A. Slavnov, *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, 2nd. edition (Frontier in Physics Series, Vol. 83, Benjamin/Cummings, 1990), and references therein.
- [10] P. West, Nucl. Phys B **268**, 125 (1986).
- [11] A. Polyakov, Nucl. Phys. B **268**, 406 (1986).
- [12] T. Lee and G. Wick, Nucl.Phys. B **9**, 209 (1969).
- [13] T. Lee and G. Wick, Phys. Rev. D **2**, 1033 (1970).
- [14] E. Bergshoeff, O. Holm, and P. Townsend, Phys. Rev. Lett. **102**, 201301 (2009).
- [15] S. Deser, Phys. Rev. Lett. **103**, 101302 (2009).

- [16] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena, and R. Turcati, Phys. Rev. D **83**, 104005 (2011).
- [17] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati and B. Pereira-Dias Class. Quantum Grav. **28**, 225008 (2011).
- [18] A. Accioly, A. Azeredo, and H. Mukai, J. Math. Phys. **43**, 473 (2002).
- [19] T. Soritiou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
- [20] I. Shapiro, A. Pelinson and F. Salles, Mod. Phys. Lett. A **29**, 1430034 (2014).
- [21] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Giacchini, and W. Herdy Phys. Rev. D **91**, 125009 (2015).
- [22] F. Salles and I. Shapiro, Phys. Rev. D **89**, 084054 (2014).
- [23] M. Veltman, in *Methods in Field Theory*, eds. R. Balian and J. Zinn-Justin (North Holland/World Scientific, 1981).
- [24] D. Dalmazi and R. Santos, Phys. Rev. D **87**, 085021 (2013).
- [25] S. Deser and P. Townsend, Phys. Lett. **98B**, 188 (1981).
- [26] I. Antoniadis and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **33**, 2756 (1986).
- [27] D. Dalmazi and R. Santos, Phys. Rev. D **84**, 045027 (2011).
- [28] M. Ostrogradski, Mem. Ac. St. Petersburg **6** (4), 385 (1850).
- [29] R. Woodard, Lect. Notes Phys. **720**, 403 (2007).
- [30] M. Plyushchay, Mod. Phys. Lett. A **4**, 837 (1989).
- [31] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, F. A. Barone, and P. Gaete, Phys. Rev. D **90**, 105029 (2014).
- [32] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, and Wallace Herdy, Class. Quantum Grav. **32**, 035021 (2015).

- [33] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, B. Giacchini, and Wallace Herdy, *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1550052 (2015).
- [34] F.A. Barone and F.E. Barone, *Phys. Rev. D* **89**, 065020 (2014).
- [35] F.A. Barone and F.E. Barone, *Eur. Phys. J. C* **74**, 3113 (2014).

# Capítulo 2

## Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial interpartículas em modelos eletromagnéticos

### *D*-dimensionais

#### 2.1 Introdução

De vez enquanto novos modelos eletromagnéticos aparecem na literatura. As razões para estudar estes sistemas são muitas e de diferentes tipos: (i) controlar as divergências no ultravioleta (UV) que estão geralmente presentes em modelos eletromagnéticos [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], (ii) obter um sistema onde uma carga pontual tenha uma auto-energia finita (a eletrodinâmica de Born-Infeld se encaixa nesse caso [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37]), (iii) encontrar um sistema que além de ter uma carga pontual com auto-energia finita, também apresente a propriedade de birrefringência (a eletrodinâmica logarítmica é um exemplo deste fato [38]), (iv) analisar modelos com quebra da simetria de Lorentz [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50], e assim por diante.

No entanto, como é bem sabido, esses modelos eletromagnéticos devem reproduzir a energia potencial de Coulomb no limite não relativístico além de uma correção para a energia acima mencionada. Por conseguinte, é de importância fundamental ter um método fácil para encontrar o aludido potencial, de modo que o seu comportamento em baixas energias possa ser analisado pronta e eficientemente.

Há, é claro, muitos métodos poderosos na literatura para a obtenção deste potencial no limite não relativístico. Infelizmente, todos esses métodos requerem cálculos algébricos excessivos e, como consequência, são processos demorados.

O nosso principal objetivo aqui é conceber um método no qual as dificuldades acima mencionadas possam ser superadas ou, pelo menos, reduzidas a um mínimo. Para conseguir isso, vamos construir na Sec. II uma prescrição para obter a energia potencial interpartículas relativa a modelos eletromagnéticos  $D$ -dimensionais baseada no funcional gerador. O ingrediente principal do método é o “propagador” no espaço dos momenta encontrado descartando todos os termos do propagador de Feynman habitual no espaço dos momenta que sejam ortogonais às correntes externas conservadas, e depois fazendo  $k^0 = 0$ , onde  $k^\mu$  é o momento da partícula trocada.

Na Seção III uma expressão simples para calcular a amplitude de Feynman não relativística ( $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ ) — o ponto chave do método para a obtenção do potencial  $D$ -dimensional baseado no casamento entre a mecânica quântica e o limite não relativístico da teoria quântica de campos — é encontrada como um subproduto da nossa prescrição.

Para testar nosso método, vamos calcular nas Seções IV e V, respectivamente, a energia potencial interpartículas  $D$ -dimensional para: (i) uma extensão bem conhecida do modelo padrão em que a eletrodinâmica não massiva  $U(1)_{\text{QED}}$  está acoplada ao setor escondido  $U(1)_h$  [51, 52, 53, 54, 55], e (ii) a eletrodinâmica Lee-Wick [1, 2].

Finalmente, na Seção VI apresentamos nossas conclusões.

Utilizamos unidades naturais ao longo do capítulo, e nossa métrica de Minkowski é  $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ .

## 2.2 Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial $D$ -dimensional interpartículas em modelos electromagnéticos

É bem sabido que o funcional gerador para os diagramas de Feynman conexos  $W_D(J)$  está relacionado ao funcional gerador de uma teoria eletromagnética livre  $Z_D(J)$ , por  $Z_D(J) = e^{iW_D(J)}$  [56, 57], onde

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \int d^D x d^D y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y). \quad (2.1)$$

Aqui  $J_\mu(x)$  e  $D_{\mu\nu}(x-y)$  são, respectivamente, a corrente externa conservada e o propagador.

Agora, tendo em conta que

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x-y) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} D_{\mu\nu}(k), \\ J_\mu(k) &= \int d^D x e^{-ikx} J_\mu(x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

obtemos prontamente

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} J^\mu(k)^* D_{\mu\nu}(k) J^\nu(k), \quad (2.3)$$

que pode ser escrito como

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} J^\mu(k)^* \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) J^\nu(k), \quad (2.4)$$

onde  $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$  é o “propagador” no espaço dos momenta obtido excluindo-se todos os termos do propagador de Feynman habitual no espaço dos momenta que sejam ortogonais às correntes externas conservadas.

Supondo que as correntes externas conservadas sejam independentes do tempo, obtemos de

(2.4),

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \left[ \delta(k^0) T \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) \int \int d^{D-1} \mathbf{x} d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} J^\mu(\mathbf{x}) J^\nu(\mathbf{y}) \right], \quad (2.5)$$

onde o intervalo de tempo  $T$  é gerado pelo factor  $\int dx^0$ .

Manipulações algébricas simples, por outro lado, reduzem a Eq.(2.5) a forma

$$W_D(J) = -T \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}), \quad (2.6)$$

onde  $\mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{P}_{\mu\nu}(k)|_{k^0=0}$ , e

$$\Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \int \int d^{D-1} \mathbf{x} d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{J^\mu(\mathbf{x}) J^\nu(\mathbf{y})}{2}. \quad (2.7)$$

Agora, no caso específico de duas cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  localizadas, respectivamente, em  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , a corrente assume a forma

$$J^\mu(\mathbf{x}) = \eta^{\mu 0} \left[ Q_1 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + Q_2 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2) \right]. \quad (2.8)$$

Portanto,

$$\Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = Q_1 Q_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}, \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{r} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ , e

$$W_D(J) = -T \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}). \quad (2.10)$$

Por outro lado,

$$Z_D(J) = \langle 0 | e^{-iH_D T} | 0 \rangle = e^{-iE_D T}, \quad (2.11)$$

o que implica em

$$E_D = -\frac{W_D(J)}{T}. \quad (2.12)$$

Como consequência, a energia potencial  $D$ -dimensional pode ser calculado através da simples expressão

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}). \quad (2.13)$$

Destacamos que esta expressão pode ser facilmente estendida para modelos escalares e tensoriais.

Chamamos a atenção para o fato de que Zee [57] utilizou a Eq. (2.1) para mostrar que a força eletromagnética entre cargas iguais é repulsiva.

## 2.3 Encontrando $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ através de nossa prescrição

Obviamente, os cálculos feitos através dos diagramas de Feynman devem coincidir no limite não-relativístico com aqueles vindos da mecânica quântica, onde a interação entre as partículas é descrita por uma energia potencial  $E_D$ . Nosso objetivo aqui é comparar as seções de choque para a interação de duas partículas obtidas, respectivamente, utilizando primeiro a mecânica quântica e depois o limite não-relativístico da teoria quântica de campos, a fim de encontrar uma expressão para calcular a energia potencial  $E_D$  experimentada por eles.

Começamos por recordar uma expressão muito conhecida da mecânica quântica, ou seja, a fórmula para a seção de choque transversal para o espalhamento elástico (em primeira ordem, ou seja, na primeira aproximação de Born) de uma partícula de massa  $m$  pelo potencial  $E_D$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (2.14)$$

onde

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi} \int d^{D-1}\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} E_D(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.15)$$

Aqui,  $\theta$  é o ângulo de espalhamento,  $\mathbf{k}$  o momento incidente, e  $\mathbf{k}'$  o momento na saída ( $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ , visto que estamos considerando um processo elástico).

Vamos, então, fazer uma comparação deste resultado com o obtido através do formalismo relativístico. Por uma questão de clareza, vamos considerar a dispersão de uma partícula não-relativística de momento  $\mathbf{k}$  e massa  $m$ , com  $|\mathbf{k}| \ll m$ , no exterior de um alvo pesado  $A$ , com massa  $M_A \gg m$ . Podemos imaginar, por exemplo, um elétron que está sendo espalhado por um átomo. Como  $|\mathbf{k}| \ll m \ll M_A$ , o recuo do átomo pode ser desconsiderado. Nesta discussão consideraremos somente a dispersão elástica. Vamos supor também que a partícula incidente e a partícula  $A$  interagem através da troca de um bóson com ou sem massa.

Agora supondo que  $M_A$  é muito maior do que a energia do elétron, a secção de choque elástica é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 M_A^2} |\mathcal{M}|^2, \quad (2.16)$$

onde  $\mathcal{M}$  é a amplitude de Feynman para o processo em questão. Denotando, por sua vez, a amplitude Feynman no limite não-relativístico por  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ , obtemos [58]

$$\mathcal{M} = (2m)(2M_A)\mathcal{M}_{\text{NR}}, \quad (2.17)$$

o que nos permite reescrever (2.16) sob a forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 |\mathcal{M}_{\text{NR}}|^2. \quad (2.18)$$

De (2.14) e (2.18), obtemos

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \int d^{D-1}\mathbf{r} E_D e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  é o momento trocado. Note que a fase de (2.19) foi escolhida de tal maneira que uma força repulsiva (potencial positivo) corresponde a uma  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$  positiva.

Dessa forma,

$$E_D = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int \mathcal{M}_{\text{NR}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^{D-1}\mathbf{q}. \quad (2.20)$$

Vale a pena notar que, no caso de dois férmions idênticos o elemento de matriz  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$  que aparece em (2.20) é apenas a parte do elemento da matriz covariante que corresponde ao espalhamento direto, pois o uso de funções de onda anti-simétricas em mecânica ondulatória não-relativística automaticamente leva em conta as contribuições devido ao espalhamento trocado [59].

Agora, uma vez que na ordem principal os métodos desenvolvidos nas secções II e III são equivalentes, chegamos à conclusão que

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = Q_1 Q_2 \mathcal{P}_{00}. \quad (2.21)$$

Portanto, a nossa prescrição produz um bônus adicional: uma expressão trivial para o cálculo de  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ .

Ressaltamos que a fórmula (2.20) foi usada para justificar a lei de Coulomb a partir da QED nos primórdios desta teoria. No livro seminal de Sakurai [59], por exemplo, o potencial de Coulomb é encontrado a partir de (2.20). Ele também é obtido utilizando-se a mesma fórmula no excelente e atual livro de Maggiore [58]. Gupta e Radford [60], por outro lado, derivaram o potencial de Coulomb a partir do operador de espalhamento, usando as técnicas da teoria de campos padrão. É importante lembrar que, antes do trabalho de Möller's, G. Breit já tinha calculado todos os termos de correção ao potencial de Coulomb utilizando essencialmente argumentos clássicos e aplicando-os ao átomo de He. Em [61, 62, 63], podemos encontrar

resultados interessantes deduzidos pelo autor mencionado no início da era da Eletrodinâmica Quântica.

## 2.4 Potencial $D$ -dimensional para uma extensão do modelo padrão na qual a eletrodinâmica não massiva

$U(1)_{\text{QED}}$  é acoplada a um setor escondido  $U(1)_h$

A maioria das extensões do modelo padrão, em especial as baseadas em teoria de cordas, muitas vezes envolvem um setor escondido — um conjunto de graus de liberdade muito fracamente acoplados as partículas do modelo padrão. Por outro lado, um modelo interessante para o estudo dos fótons massivos de um setor escondido é baseado na suposição de que a dinâmica em baixa energia contém, em adição ao setor eletromagnético familiar  $U(1)_{\text{QED}}$ , um outro setor escondido  $U(1)_h$  no qual todas as partículas do modelo padrão tem carga zero. Estes dois grupos de calibre  $U(1)$  podem ser descritos em baixas energias pela Lagrangiana renormalizável [51, 52, 53, 54, 55]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}\chi F^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu \\ & + J_{(A)}^\mu A_\mu + J_{(B)}^\mu B_\mu, \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor intensidade de campo para o campo de calibre  $A_\mu$  do eletromagnetismo usual  $U(1)_{\text{QED}}$ ,  $B_{\mu\nu}$  é a intensidade do campo para o campo  $B_\mu$  no sector escondido  $U(1)_h$  e  $J_{(A)}^\mu$  e  $J_{(B)}^\mu$  são as respectivas correntes. Os dois primeiros termos são os termos cinéticos padrões para os campos dos fótons e dos fótons do setor escondido, ou parafótons, nesta ordem; enquanto o terceiro termo, chamado de mistura cinética, corresponde a um termo cinético não diagonal. Por uma questão de positividade da energia, o  $\chi$ -parameter deve ser tal que  $|\chi| < 1$ . Vale a pena notar que a mistura cinética surge tanto em configurações de teoria de campos [64, 65], como em teoria de cordas [66, 67, 68, 69], e valores típicos previstos para esse parâmetro ficam na faixa entre  $10^{-16}$  e  $10^{-4}$ . O quarto termo na Lagrangiana acima

é responsável por uma possível massa dos parafótons. O objetivo de analisar esse modelo aqui é investigar o impacto do parafótons ( $U(1)_h$ ) em observáveis físicos. Para realizar essa tarefa, calcularemos a energia potencial interpartículas  $D$ -dimensional entre as cargas, usando a prescrição previamente descrita.

Para começar, vamos escrever os primeiros quatro termos da Lagrangiana (2.22) em termos dos operadores de projeções vetoriais usuais  $\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$  e  $\omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ . No calibre de Lorentz ( $\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$ ) os termos mencionados assumem a seguinte forma no espaço dos momenta

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3, \quad (2.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} A_\mu K_1^{\mu\nu} A_\nu \\ &= \frac{1}{2} A_\mu \left[ -k^2 \theta^{\mu\nu} - \frac{k^2}{\lambda} \omega^{\mu\nu} \right] A_\nu, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} B_\mu K_3^{\mu\nu} B_\nu \\ &= \frac{1}{2} B_\mu \left[ (m^2 - k^2) \theta^{\mu\nu} + m^2 \omega^{\mu\nu} \right] B_\nu, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= A_\mu K_2^{\mu\nu} B_\nu \\ &= A_\mu \left[ -\chi k^2 \theta^{\mu\nu} \right] B_\nu. \end{aligned} \quad (2.26)$$

E então, juntamos  $A_\mu$  e  $B_\nu$  em um dubleto

$$\Theta_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

o que facilita muito o cálculo dos propagadores. Como resultado (2.22) pode ser reescrita na

forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_\mu K^{\mu\nu} \Theta_\nu + \tilde{J}^\mu \Theta_\mu, \quad (2.28)$$

onde

$$K^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} K_1^{\mu\nu} & K_2^{\mu\nu} \\ K_2^{\mu\nu} & K_3^{\mu\nu} \end{bmatrix},$$

e

$$J^\mu = \begin{pmatrix} J_{(A)}^\mu \\ J_{(B)}^\mu \end{pmatrix}.$$

Após longos cálculos algébricos, somos capazes de encontrar o operador  $K_{\mu\nu}^{-1}$ ,

$$K_{\mu\nu}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{\mu\nu} \equiv \langle A_\mu A_\nu \rangle & b_{\mu\nu} \equiv \langle A_\mu B_\nu \rangle \\ b_{\mu\nu} \equiv \langle A_\mu B_\nu \rangle & c_{\mu\nu} \equiv \langle B_\mu B_\nu \rangle \end{bmatrix},$$

onde

$$a_{\mu\nu} = \frac{k^2 - m^2}{k^4 \chi^2 + k^2(m^2 - k^2)} \theta_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2} \omega_{\mu\nu},$$

$$b_{\mu\nu} = -\frac{\chi}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)} \theta_{\mu\nu},$$

$$c_{\mu\nu} = \frac{\theta_{\mu\nu}}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)} + \frac{\omega_{\mu\nu}}{m^2}.$$

Da Sec. II, chegamos a conclusão que

$$E_D = \frac{1}{2T} \int \int d^D x d^D y J^\mu(x) K_{\mu\nu}^{-1}(x - y) J^\nu(y). \quad (2.29)$$

Consequentemente,

$$E_D = E_I + 2E_{II} + E_{III},$$

onde

$$E_I = \frac{1}{2T} \int \int d^D x d^D y J_{(A)}^\mu(x) a_{\mu\nu}(x-y) J_{(A)}^\nu(y),$$

$$E_{II} = \frac{1}{2T} \int \int d^D x d^D y J_{(A)}^\mu(x) b_{\mu\nu}(x-y) J_{(B)}^\nu(y),$$

$$E_{III} = \frac{1}{2T} \int \int d^D x d^D y J_{(B)}^\mu(x) c_{\mu\nu}(x-y) J_{(B)}^\nu(y),$$

Por outro lado, é fácil mostrar que as expressões acima podem ser reescritas como

$$E_I = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \mathcal{P}_{\mu\nu}^{(a)}(\mathbf{k}) \Delta_{(a)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}),$$

$$E_{II} = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \mathcal{P}_{\mu\nu}^{(b)}(\mathbf{k}) \Delta_{(b)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}),$$

$$E_{III} = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \mathcal{P}_{\mu\nu}^{(c)}(\mathbf{k}) \Delta_{(c)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}),$$

onde  $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(a)}(\mathbf{k})$ ,  $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(b)}(\mathbf{k})$ , e  $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(c)}(\mathbf{k})$ , são os “propagadores” no espaço dos momenta encontrados negligenciando-se todos os termos dos propagadores de Feynman correspondentes

$$a_{\mu\nu}(k), b_{\mu\nu}(k), c_{\mu\nu}(k),$$

nesta ordem, que são ortogonais as correstes conservadas, e fazendo  $k^0 = 0$  em todos eles. Os  $\Delta_{(i)}^{\mu\nu}$ ,  $i = a, b, c$ , por sua vez são definidos como

$$\Delta_{(a)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \int \int d^{D-1}\mathbf{x} d^{D-1}\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{J_{(A)}^\mu(x) J_{(A)}^\nu(y)}{2},$$

$$\Delta_{(b)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \int \int d^{D-1}\mathbf{x}d^{D-1}\mathbf{y}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{J_{(A)}^\mu(x)J_{(B)}^\nu(y)}{2},$$

$$\Delta_{(c)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \int \int d^{D-1}\mathbf{x}d^{D-1}\mathbf{y}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{J_{(B)}^\mu(x)J_{(B)}^\nu(y)}{2}.$$

Se as correntes são escritas como

$$J_{(A)}^\mu(x) = \eta^{\mu 0} [\sigma_1 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + \sigma_2 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)],$$

$$J_{(B)}^\mu(y) = \eta^{\mu 0} [\rho_1 \delta^{D-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_1) + \rho_2 \delta^{D-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_2)],$$

obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} E_I(r) &= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00}^{(a)}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{\chi^2}{1 - \chi^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + M^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{II}(r) &= \frac{\sigma_1 \rho_2 + \sigma_2 \rho_1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00}^{(b)}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{\chi}{\chi^2 - 1} \frac{\sigma_1 \rho_2 + \sigma_2 \rho_1}{2(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + M^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{III}(r) &= \frac{\rho_1 \rho_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00}^{(c)}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \chi^2} \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + M^2}. \end{aligned}$$

Aqui  $M^2 \equiv \frac{m^2}{1-\chi^2}$ . Calculando as integrais anteriores, chegamos à conclusão de que para  $D > 3$

$$\begin{aligned}
E_D = & \frac{\sigma_1\sigma_2}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right)}{r^{D-3}} \\
& + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ \frac{\sigma_1\sigma_2\chi^2}{1-\chi^2} + \frac{\chi(\sigma_1\rho_2 + \sigma_2\rho_1)}{\chi^2 - 1} \right. \\
& \left. + \frac{\rho_1\rho_2}{1-\chi^2} \right] \left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(Mr), \tag{2.30}
\end{aligned}$$

enquanto que para  $D = 3$

$$\begin{aligned}
E_3 = & -\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sigma_1\sigma_2\chi^2}{1-\chi^2} + \frac{\chi(\sigma_1\rho_2 + \sigma_2\rho_1)}{\chi^2 - 1} \right. \\
& \left. + \frac{\rho_1\rho_2}{1-\chi^2} \right] K_0(Mr), \tag{2.31}
\end{aligned}$$

onde  $\Gamma$  é a função gamma,  $K_\nu$  é a função de Bessel modificada de segunda ordem de ordem  $\nu$ , e  $r_0$  é um regulador do infravermelho.

Observamos que poderíamos ter reformulado os campos  $A_\mu$  e  $B_\mu$  através da diagonalização da matriz,  $\mathcal{K}$ , no termo cinético de (2.20) [65],

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & \chi \\ \chi & 1 \end{pmatrix},$$

por meio de uma transformação ortogonal. Fazendo isso poderíamos redefinir a escala dos novos campos vetoriais por um fator  $\sqrt{1 \pm \chi}$  e como resultado obteríamos uma base para os novos campos com termos cinéticos canônicos. No entanto, isso produziria novos termos de mistura de massa entre os campos vetoriais da nova base e propagadores não diagonais apareceriam de qualquer forma, misturando os campos reformulados. Essa é a razão pela qual optamos por trabalhar com os campos  $A_\mu$  e  $B_\mu$  com um termo de mistura cinética tal como consta na Lagrangiana (2.22). Na verdade, isto pode ser facilmente visto, se seguirmos os passos descritos abaixo.

Em primeiro lugar, nós reescrevemos (2.20) na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_\mu \mathcal{K} \square \theta^{\mu\nu} \Theta_\nu + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_\mu M^2 \Theta^\mu + \tilde{\Theta}_\mu J^\mu,$$

onde

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix}.$$

Agora, se  $R$  é a matriz de  $SO(2)$  que diagonaliza  $\mathcal{K}$ , então

$$R\mathcal{K}\tilde{R} = \mathcal{K}_d,$$

$$\mathcal{K}_d = \begin{pmatrix} 1 + |\chi| & 0 \\ 0 & 1 - |\chi| \end{pmatrix},$$

$$0 < |\chi| < 1.$$

Por outro lado, considerando-se  $0 < \chi < 1$ , obtemos prontamente

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

com  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , o que nos permite escrever a Lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}_\mu \mathcal{K}_d \square \theta^{\mu\nu} \Lambda_\nu + \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}_\mu \tilde{M}^2 \Lambda^\mu + \tilde{\Lambda}_\mu J_\Lambda^\mu,$$

com  $R\Theta_\mu = \Lambda_\mu$ ,  $\tilde{M}^2 = RM^2\tilde{R}$ ,  $J_\Lambda = RJ$ .

Para absorver a matriz  $\mathcal{K}_d^{\frac{1}{2}}$ , definimos o campo  $\Lambda_\mu$  como

$$\mathcal{K}_d^{\frac{1}{2}}\Lambda_\mu = \Sigma_\mu,$$

de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\tilde{\Sigma}_\mu \square \Theta^{\mu\nu} \Sigma_\nu + \frac{1}{2}\tilde{\Sigma}_\mu \mu^2 \Sigma^\mu + \tilde{\Sigma}_\mu J_\Sigma^\mu,$$

com

$$J_\Sigma \equiv \mathcal{K}_d^{-\frac{1}{2}} J_\Lambda, \quad \mu^2 \equiv \mathcal{K}_d^{-\frac{1}{2}} \tilde{M}^2 \mathcal{K}_d^{-\frac{1}{2}},$$

onde

$$\mu^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{1-\chi^2} \end{pmatrix}.$$

Nesse ponto, o parâmetro  $\chi$  foi movido para a nova matriz (simétrica) de massa  $\mu^2$ . Podemos então concluir com o entendimento de que seria possível trabalhar com uma base de campos mais física, ou seja, aquela dada por  $\Sigma_\mu$ , para a qual temos o termo cinético canônico e uma matriz de massa diagonal. É importante notar que com esta parametrização dos campos, o parâmetro  $\chi$  se move do termo cinético para o espectro de massa e para o acoplamento dos campos externos. Para o propósito dos nossos cálculos no intuito de obter o potencial interpartículas, ambas as bases,  $\Theta_\mu$  e  $\Sigma_\mu$ , são perfeitamente equivalentes. Os propagadores, em ambas as bases, exibem exatamente os mesmos polos: 0 e  $\frac{m^2}{1-\chi^2}$ , que são as massas físicas no espectro.

Vamos, então, retornar ao assunto que estávamos discutindo antes desta digressão. Tendo em mente que  $K_\nu(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$  for  $r \rightarrow \infty$ , vemos claramente que (2.30) e (2.31) reproduzem assimtoticamente a energia potencial de Coulomb.

Uma vez que o modelo que estamos analisando foi originalmente construído em um espaço-

tempo de quatro dimensões, exibimos abaixo a expressão para a energia potencial de  $D = 4$

$$E_4 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi} \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\sigma_1\sigma_2\chi^2}{1-\chi^2} + \frac{\chi(\sigma_1\rho_2 + \sigma_2\rho_1)}{\chi^2-1} + \frac{\rho_1\rho_2}{1-\chi^2} \right] \frac{e^{-Mr}}{r}. \quad (2.32)$$

Suponha agora que nós consideremos o modelo (22), com  $J_{(A)}^\mu = J_{(B)}^\mu = 0$ , no limite de um campo  $B$  muito pesado, ou seja,  $m \gg m_\gamma$ , onde  $m_\gamma$  é a massa do fóton. Se nos limitarmos a energias  $\ll m$ , podemos integrar sobre o campo  $B_\mu$  para obtermos um modelo efetivo para o campo  $A_\mu$ . Isso pode ser feito através da formulação por integral de caminho do funcional gerador que corresponde ao modelo aludido. Alterando o campo  $B_\mu$  de acordo com a expressão

$$B_\mu = \hat{B}_\mu - \frac{1}{\square + m^2} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\nu}, \quad (2.33)$$

e realizando depois a integração Gaussiana sobre este campo, chegamos à seguinte Lagrangian efetiva para  $A_\mu$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{\chi^2}{4} F_{\mu\nu} \frac{\square}{\square + m^2} F^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Agora estamos prontos para calcular a energia potencial  $D$ -dimensional interpartículas através da prescrição desenvolvida na Seção II.

No calibre de Lorentz o propagador no espaço dos momenta relativo ao modelo (2.34) é

$$D_{\mu\nu}(k) = \left[ -\frac{1}{k^2} + \frac{\chi^2}{\chi^2-1} \frac{1}{k^2 - M^2} \right] \theta_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2} \omega_{\mu\nu},$$

onde  $M^2 \equiv \frac{m^2}{1-\chi^2}$ .

Sendo assim,

$$\mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{\chi^2}{\chi^2-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + M^2}. \quad (2.35)$$

Como resultado, a energia potencial  $D$ -dimensional interpartículas para a interação de duas cargas estáticas  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  é dada para  $D > 3$  por

$$E_D(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ \frac{2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma(\frac{D-3}{2})}{r^{D-3}} - \frac{\chi^2}{\chi^2 - 1} \left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(Mr) \right], \quad (2.36)$$

enquanto para  $D = 3$

$$E_3(r) = -\frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi} \left[ \ln \frac{r}{r_0} + \frac{\chi^2}{\chi^2 - 1} K_0(Mr) \right]. \quad (2.37)$$

Ambas equações (2.36) e (2.37) podem, obviamente, ser obtidas a partir de (2.30) e (2.31), fazendo  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  nas equações acima mencionadas. Por outro lado, se fizermos  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  em (2.32) a equação resultante reproduz a encontrada em [70].

## 2.5 $E_D$ para a eletrodinâmica de Lee-Wick

Modelos  $D$ -dimensionais com derivadas de mais alta ordem têm sido objetos de intensa pesquisa atualmente. A motivação para o estudo destes sistemas reside no fato de que as derivadas de mais alta ordem têm sido usadas freqüentemente como um mecanismo poderoso para domar as selvagens divergências UV que são comumente encontradas em modelos físicos relevantes. Por exemplo, no início dos anos 70 Lee e Wick (LW) afirmaram ter descoberto uma versão finita da QED [1, 2]; no entanto, o modelo que eles apresentaram sofre de um grave problema: a presença de graus de liberdade associados a uma norma não-positiva no espaço de Hilbert. Para remediar esta situação difícil, esses autores adotaram modificações *ad hoc* para a continuação analítica das amplitudes [2]. Em resumo, podemos dizer que o trabalho de LW consiste essencialmente na introdução de campos de Pauli-Villars, com o sinal trocado no propagador, como graus físicos de liberdade que levam a amplitudes que são mais bem comportadas no UV e tornam finita a QED logaritmicamente divergente. Recentemente, as teorias LW têm sido alvo grande interesse devido a introdução de teorias de calibre não abelianas de LW por

Grinstein, O'Connell, e Wise [71, 72]. O modelo deles, geralmente referido como o Modelo Padrão de LW, é naturalmente livre de divergências quadrática, proporcionando assim uma forma alternativa para a solução do problema da hierarquia. Embora o modelo de LW seja não unitário, no âmbito da teoria quântica de campos usual, isso não implica que este deva ser rejeitado. Na verdade, os sistemas com derivadas de ordem superior podem ser utilizados como modelos efetivos em escalas familiares [73]. Vale a pena notar que, nesse sentido, muitos estudos interessantes relacionados a eletrodinâmica de LW têm sido realizados atualmente [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Sendo assim, devido ao grande interesse que esta eletrodinâmica tem despertado na literatura, vamos estudar o papel desempenhado pelas derivadas de mais alta ordem neste modelo, através da análise de sua energia potencial interpartículas  $D$ -dimensional.

A teoria de LW é definida pela Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu},$$

onde  $m (> 0)$  é um parâmetro com dimensão de massa. O propagador relacionado a esta teoria no calibre de Lorentz pode por sua vez ser escrito no espaço dos momenta como

$$D_{\mu\nu} = \frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)}\theta_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}\omega_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Consequentemente,

$$\mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.39)$$

Como resultado, a energia potencial para a interação de duas cargas pontuais  $Q_1$  e  $Q_2$  localizadas, respectivamente, em  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , pode ser calculada através da expressão

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \left[ \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right].$$

Segue-se então que para  $D \neq 3$

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ \frac{2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma(\frac{D-3}{2})}{r^{D-3}} - \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr) \right], \quad (2.40)$$

enquanto que para  $D = 3$

$$E_3(r) = -\frac{Q_1 Q_2}{2\pi} \left[ \ln \frac{r}{r_0} + K_0(mr) \right]. \quad (2.41)$$

Ambas as equações (2.40) e (2.41) estão de acordo com [3].

Tendo em conta que  $K_\nu(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$  para  $r \rightarrow \infty$ , é fácil ver que (2.40) e (2.41) concordam assintoticamente com a energia potencial de Coulomb.

Analisamos a seguir o comportamento a pequenas distâncias da energia potencial, considerando as duas situações possíveis:  $D \neq 3$  e  $D = 3$ .

$D \neq 3$

Aqui nós temos que levar em conta se  $\nu \notin N$  ou  $\nu \in N$ .

No primeiro caso, isto é,  $\nu \notin N$ , para  $z \rightarrow 0$ ,

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \left[ \Gamma(\nu) \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \left(1 + \frac{z^2}{4(1-\nu)} + \frac{z^4}{32(1-\nu)} \times \frac{1}{(2-\nu)} + \dots\right) + \Gamma(-\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left(1 + \frac{z^2}{4(\nu+1)} + \frac{z^4}{32(\nu+1)(\nu+2)} + \dots\right) \right],$$

o que implica em  $D = 2$  ou  $3 < D < 5$ . Portanto, se  $D$  é um número par, existem apenas dois modelos que são finitos em  $r = 0$ : A eletrodinâmica de LW em duas ou quatro dimensões. Estes sistemas são renormalizável e suas energias potenciais em  $r = 0$  são iguais a

$$E_2(r = 0) = -\frac{Q_1 Q_2}{2m},$$

$$E_4(r = 0) = \frac{Q_1 Q_2 m}{4\pi}.$$

Por outro lado, se  $\nu \in N$ ,

$$\begin{aligned} K_\nu(z) = & (-1)^{\nu-1} \ln\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!(k+\nu)!} + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k (\nu-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \\ & \frac{(-1)^\nu}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+\nu+1)}{k!(k+\nu)!} \\ & \times \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \end{aligned}$$

onde  $\psi(z) \equiv \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$  é a função psi. Infelizmente, se  $D$  é um número ímpar, o sistema correspondente é singular em  $r = 0$ .

$$D = 3$$

Neste caso, a energia potencial é finita em  $r = 0$ , e igual a

$$E_3(r = 0) = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi} \ln(mr_0).$$

## Sumário

Em suma, podemos dizer que, para  $D = 2$ ,  $D = 3$ , e  $D = 4$  as derivadas de mais alta ordem presentes no modelo são capazes de domar as divergências da eletrodinâmica de LW na origem; infelizmente, para  $D > 4$  estas derivadas de mais alta ordem são incapazes de controlar as divergências mencionadas.

## 2.6 Considerações finais

Desenvolvemos uma prescrição trivial para calcular a energia potencial para modelos eletromagnéticos  $D$ -dimensionais. A parte essencial do método consiste em encontrar o "propagador"  $\mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathbf{k})$ ,

que envolve um cálculo bastante direto. A energia potencial pode então ser facilmente calculada por meio da expressão

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}).$$

Essa prescrição também pode ser utilizada para encontrar  $E_D$  para a interação de duas cargas escalares estáticas  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , bem como para a interação de duas massas estáticas  $M_1$  e  $M_2$ . No primeiro caso

$$E_D(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \mathcal{P}(\mathbf{k}),$$

enquanto no último

$$E_D(r) = \frac{M_1 M_2}{(2\pi)^{D-1}} \kappa_D \int d^{D-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}),$$

onde  $\kappa_D$  é a constante de Einstein  $D$ -dimensional [74].

Também mostramos como generalizar o método em questão para o caso de um duplete de correntes. Em essência, tudo que temos que fazer neste caso é calcular  $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(i)}(\mathbf{k})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Por outro lado, obtivemos uma expressão trivial para o cálculo da amplitude de Feynman no limite não-relativístico ( $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ ), como um efeito colateral da nossa prescrição. Se apelarmos para métodos ortodoxos para efetuarmos estes cálculos seremos frequentemente confrontados com um trabalho demorado, especialmente em processos mediados por grávitons. Ilustramos a eficácia e a simplicidade da prescrição através de dois exemplos: a eletrodinâmica de LW e a gravidade com derivadas de ordem mais alta.

No primeiro caso,  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$  para a interação de dois elétrons (cada um com carga  $-e$  ( $e > 0$ )) é dada por (Veja Eq. (2.39))

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = e^2 \left[ \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right].$$

No que concerne a gravidade com derivadas de ordem mais alta, cuja Lagrangian adequado

para calcular o propagador é

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{D-1}} g \left( \frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right),$$

onde  $\kappa^2 = 4\pi\kappa_D$ , pode ser mostrado que [74]

$$\mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}) = \frac{3-D}{D-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2},$$

onde  $m_2^2 \equiv -\frac{4}{\beta\kappa^2}$ ,  $m_0^2 \equiv \frac{4(D-2)}{\kappa^2 [4\alpha(D-1) + D\beta]}$ .

Dessa forma, para a interação de duas massas  $M_1$  e  $M_2$ , nós encontramos prontamente que

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = M_1 M_2 \kappa_D \left[ -\frac{D-3}{D-2} \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \right].$$

Ressaltamos que é um trabalho muito difícil calcular, através de métodos tradicionais, a amplitude de Feynman não-relativística relacionada a este exemplo específico.

Resumindo, podemos dizer que, em comparação com os métodos convencionais nossa prescrição apresenta as seguintes vantagens:

- (i) Os cálculos são mais fáceis de efetuar, no âmbito de nosso método.
- (ii) A nossa prescrição proporciona, como um bônus adicional, a amplitude Feynman não-relativística de uma forma direta.
- (iii) O método pode ser utilizado para encontrar a energia potencial interpartículas para modelos com um duplete de correntes. Além disso, se um dos dois campos do sistema é muito pesado, podemos encontrar o modelo efetivo relativo ao campo restante, simplesmente reduzindo a zero as carga relacionadas a corrente do campo pesado. Em outras palavras, não há necessidade de se fazer um *shifting* no campo pesado e depois realizar a integração Gaussiana sobre este campo, a fim de chegar ao modelo efetivo.

Para concluir, comentamos uma experiência recentemente proposta para pesquisar os bósons

de calibre do setor escondido  $U(1)$  com uma pequena mistura cinética  $\chi$  com o fóton ordinário [75]. A aparato consiste em colocar um magnetômetro sensível dentro de uma blindagem supercondutora, que é por sua vez colocado dentro de um campo magnético forte. Os autores do experimento proposto argumentaram que oscilações do tipo para-fóton fóton-fóton permitiria que o campo magnético vazasse para dentro do volume da blindagem, neste caso o magnetômetro poderia registrar o campo. Para este propósito eles consideraram a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 - \frac{\chi}{2}F^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu + \frac{M_{\text{Lon}}^2}{2}A^\mu A_\mu, \quad (2.42)$$

onde  $M_{\text{Lon}}$  é a massa de London, ou seja, a massa que o fóton adquire no interior do supercondutor. Uma vez que no vácuo  $M_{\text{Lon}} = 0$ , (2.42) se reduz a (2.22) na ausência de correntes. Devido à relevância especial desta experiência, é importante analisar a estabilidade do cenário acima.

Seguindo os mesmos passos que levaram a (34), obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}A_\mu \left[ \frac{k^4(1-\chi^2) - k^2(M_{\text{Lon}}^2 + m^2) + M_{\text{Lon}}^2 m^2}{m^2 - k^2} \theta^{\mu\nu} + \frac{M_{\text{Lon}}^2 \lambda - k^2}{\lambda} \omega^{\mu\nu} \right] A_\nu. \quad (2.43)$$

Portanto, o propagador associado a (2.43) é dado por

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(1-\chi^2)} \frac{1}{(M_2^2 - M_1^2)} \left[ \frac{M_1^2 - m^2}{k^2 - M_1^2} - \frac{M_2^2 - m^2}{k^2 - M_2^2} \right] \theta_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\lambda M_{\text{Lon}}^2 - k^2} \omega_{\mu\nu}, \quad (2.44)$$

onde

$$M_1^2 = \frac{(m^2 + M_{\text{Lon}}^2) \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2 M_{\text{Lon}}^2 (1-\chi^2)}{(m^2 + M_{\text{Lon}}^2)^2}} \right]}{2(1-\chi^2)},$$

$$M_2^2 = \frac{(m^2 + M_{\text{Lon}}^2) \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2 M_{\text{Lon}}^2 (1-\chi^2)}{(m^2 + M_{\text{Lon}}^2)^2}} \right]}{2(1 - \chi^2)}.$$

Conseqüentemente,

$$\mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(1 - \chi^2)} \frac{1}{(M_2^2 - M_1^2)} \left[ \frac{M_2^2 - m^2}{\mathbf{k}^2 + M_2^2} - \frac{M_1^2 - m^2}{\mathbf{k}^2 + M_1^2} \right].$$

Sendo assim, a energia potencial para  $D = 4$  fica

$$E_4(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi(1 - \chi^2)(M_2^2 - M_1^2)} \left[ (M_2^2 - m^2) \frac{e^{-M_2 r}}{r} - (M_1^2 - m^2) \frac{e^{-M_1 r}}{r} \right]. \quad (2.45)$$

Agora, se fizermos  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  em (2.32), obtemos

$$E_4(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} + \frac{\chi^2}{1 - \chi^2} \frac{e^{-Mr}}{r} \right]. \quad (2.46)$$

Segue-se que para  $M_{\text{Lon}} = 0$ , (2.45) se reduz a (2.46).

Por último, mas não menos importante, chamamos a atenção para o fato interessante de que dentro de uma caixa supercondutora o modelo em questão descreve precisamente uma fase de blindagem (ver (2.45)).

# Referências Bibliográficas

- [1] T. Lee and G. Wick, Nucl. Phys. B **9**, 209 (1969).
- [2] T. Lee and G. Wick, Phys. Rev. D **2**, 1033 (1970).
- [3] F. A. Barone, G. Flores-Hidalgo, and A. Nogueira, Phys. Rev. D **88**, 105031 (2013).
- [4] R. Cuzinato, C. de Melo, L. Medeiros, and P. Pompeia, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 3641 (2011).
- [5] A. Accioly and E. Scatena, Mod. Phys. Lett. A **25**, 269 (2010).
- [6] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, Mod. Phys. Lett. A **26**, 1985 (2011).
- [7] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, arXiv:1012.1045v2.
- [8] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Pereira-Dias, and C. Hernaski, Phys. Rev. D **86**, 105046 (2012).
- [9] C. Galvão and B. Pimentel, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).
- [10] B. Bufalo, B. Pimentel, and G. Zambrano, Phys. Rev. D **83**, 045007 (2011).
- [11] M. Bertin, B. Pimentel, and G. Zambrano, J. Math. Phys. (N.Y.) **52**, 102902 (2011).
- [12] J. Frankel, Phys. Rev. E **54**, 5859 (1996).
- [13] A. Zayats, arXiv:1306.3966.

- [14] R. B. B. Santos, *Mod. Phys. Lett. A* **26**, 1909 (2011).
- [15] S. Moyaedi, M. Setare, and B. Khosropour, *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 657870 (2013).
- [16] S. Moyaedi, M. Setare, and B. Khosropour, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350142 (2013).
- [17] P. Gaete, J. Helayël-Neto, and E. Spallucci, *J. Phys. A* **45**, 215401 (2012).
- [18] R. Cuzinato, C. Melo, and P. Pompeia, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **322**, 1211 (2007).
- [19] S. Kruglov, *J. Phys. A* **43**, 245403 (2010).
- [20] I. Cho and O. Kwon, *Phys. Rev. D* **82**, 025013 (2010).
- [21] A. Accioly and M. Dias, *Phys. Rev. D* **70**, 107705 (2004).
- [22] P. Gaete, *Int. J. Phys. A* **27**, 1250061 (2012).
- [23] P. Gaete and E. Spallucci, *J. Phys. A* **45**, 065401 (2012).
- [24] M. Born and L. Infeld, *Proc. R. Soc. Lond. A* **144**, 1934 (1934).
- [25] A. Accioly, *Am. J. Phys.* **65**, 882 (1977).
- [26] P. Gaete and I. Schmidt, *Int. J. Phys. A* **19**, 3427 (2004).
- [27] M. Setare and M. Kamali, *Int. J. Phys. A* **28**, 1350154 (2013).
- [28] M. Kiessling, arXiv:1107.2333v2.
- [29] M. Kiessling, *J. Math. Phys.* **52**, 022902 (2011).
- [30] H. Carley and M. Kiessling, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 030402 (2006).
- [31] S. Vellozo, J. Helayël-Neto, A. Smith, and L. De Assis, *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 2934 (2008).
- [32] S. Vellozo, J. Helayël-Neto, A. Smith, and L. De Assis, *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 1905 (2009).

- [33] D. Comelli, Phys. Rev. D **72**, 064018 (2005).
- [34] A. Khoudeir and Y. Parra, Phys. Rev. D **58**, 025010 (1998).
- [35] S. Kruglov, Int. J. Theor. Phys. **52**, 2477 (2013).
- [36] S. Kruglov, J. Phys. A **43**, 375402 (2010).
- [37] S. Kruglov, Phys. Rev. D **75**, 117301 (2007).
- [38] P. Gaete and J. Helayël-Neto, Eur.Phys. J. C **74**, 2816 (2014).
- [39] S. Carroll, G. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [40] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999).
- [41] R. Myers M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003).
- [42] P. Bolokhov and M. Pospelov, Phys. Rev. D **77**, 025022 (2008).
- [43] C. Reyes, L. Urrutia, and J. Vergas, Phys. Rev. D **78**, 125011 (2008).
- [44] C. Reyes, Phys. Rev. D **82**, 125036 (2010).
- [45] C. Reyes, Phys. Rev. D **87**, 125028 (2013).
- [46] A. Andrianov, P. Giacconi, and R. Soldati, JHEP 0202 (2002) 030.
- [47] B. Altschul, Q. Bailey, and V. Kostelecký, Phys. Rev. D **81**, 065028 (2010).
- [48] V. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009).
- [49] V. Kostelecký, arXiv:1309.3761v1.
- [50] V. Kostelecký, arXiv:1010.4559v1.
- [51] B. Holdom, Phys. Lett. B **259**, 329 (1991).
- [52] R. Foot and X-G He, Phys. Lett. B **267**, 509 (1991).

- [53] M. Ahlers, H. Gies, J. Jaeckel, J. Redondo, and A. Ringwald, *Phys. Rev. D* **77**, 015020 (2008).
- [54] M. Ahlers, H. Gies, J. Jaeckel, J. Redondo, and A. Ringwald, *Phys. Rev. D* **76**, 115005 (2007).
- [55] J. Jaeckel and A. Ringwald, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **60**, 405 (2010).
- [56] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2nd ed. (1996).
- [57] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2nd ed. (2010).
- [58] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press, (2005).
- [59] J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company (1967).
- [60] S. Gupta and S. Radford, *Phys. Rev. D* **21**, 2213 (1980).
- [61] G. Breit, *Phys. Rev.* **34**, 553 (1929).
- [62] G. Breit, *Phys. Rev.* **39**, 616 (1932).
- [63] G. Breit, *Phys. Rev.* **51**, 248 (1937).
- [64] B. Holdom, *Phys. Lett. B* **166**, 196 (1986).
- [65] R. Foot and A. Kobakhidze, *Phys. Lett. B* **650**, 46 (2007).
- [66] K. Dienes, C. Kolda, and J. March-Russell, *Nucl. Phys. B* **492**, 104 (1997).
- [67] D. Lüst and S. Stieberger, *Fortschr. Phys.* **55**, 427 (2007).
- [68] S. Abel, J. Jaeckel, V. Khoze, and A. Ringwald, arXiv:hep-ph/0608248.
- [69] J. Kim, *Phys. Rev. D* **76**, 051701 (2007).
- [70] P. Gaete and I. Schmidt, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 863 (2011).

- [71] B. Grinstein, D. O'Connell and M. B. Wise,  
Phys. Rev. D **77**, 025012 (2008)
- [72] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. B. Wise,  
Phys. Rev. D **77**, 065010 (2008).
- [73] See, for instance, T. Soritiou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
- [74] A. Accioly, J. Halayël-Neto, F. E. Barone, and W. Herdy, Class. Quantum Grav. **32**,  
035021 (2015).
- [75] J. Jaeckel and J. Redondo, Eur. Phys. Lett. **84**, 31002 (2008).

# Capítulo 3

## Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial $D$ -dimensional em sistemas gravitacionais

### 3.1 Introdução

De vez em quando novos e interessantes modelos gravitacionais são propostos com o objetivo de superar os obstáculos que muitas vezes são inerentes na descrição teórica da interação gravitacional. Além disso, todos estes sistemas têm, inevitavelmente, que reproduzir a energia gravitacional newtoniana no limite não relativístico, mais uma correção. Portanto, é de extrema importância que exista uma prescrição fácil para encontrar este potencial de forma que o seu comportamento em pequenas distâncias possa ser analisado com rapidez e eficiência.

Sem dúvida, muitos métodos poderosos para calcular o potencial aludido podem ser encontrados na literatura. Infelizmente, todos esses métodos além de exigir excessivos cálculos algébricos, são também, como consequência, procedimentos demorados.

Nosso principal objetivo aqui é desenvolver um método com o qual os obstáculos acima mencionados possam ser superados ou, pelo menos, reduzido a um mínimo. Para isso, construímos na seção 2 uma prescrição simples para calcular a energia potencial de modelos gravitacionais

D-dimensionais, que se apoia fortemente na integral de caminho de Feynman [1, 2, 3]. O principal ponto do método é o propagador no espaço dos momenta que obtemos quando nos livramos de todos os termos do propagador usual que são ortogonais às correntes externas conservadas, e fazemos  $k^0 = 0$ , onde  $k^\mu$  é o momento da partícula trocada.

A prescrição é testada na seção 3, onde encontramos a energia potencial para a gravidade D-dimensional com derivadas de ordem superior. Tanto o comportamento assintótico como a pequenas distâncias dos modelos são analisadas. Curiosamente, dois novos sistemas com derivadas de ordem superior,  $D = 5$  e  $D = 6$ , respectivamente, em que a energia potencial é finita na origem, são encontrados.

Na seção 4, uma expressão trivial para o cálculo da amplitude Feynman não-relativística ( $\mathcal{M}_{NR}$ ) - o ponto chave do método de obtenção da energia potencial D-dimensional com base na fusão da mecânica quântica com o limite não relativístico da teoria quântica de campos - é obtida como um efeito colateral da nossa prescrição.

Nossas conclusões são apresentadas na seção 5. Detalhes técnicos de cálculos são relegados aos apêndices. Usamos unidades naturais ao longo do texto e nossa métrica Minkowski é diag.  $(1, -1, \dots, -1)$ .

## 3.2 Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial em modelos gravitacionais D-Dimensionais

É bem sabido que o funcional gerador para os diagramas Feynman conexos  $W_D$  está relacionado ao funcional gerador  $Z_D$  para uma teoria de campo genérico, por  $Z_D = e^{iW_D}$  [1, 2, 3]. Para as teorias dos campos escalar, eletromagnético, e para a gravidade linearizada, por exemplo,  $W_D$  é dado, respectivamente, por

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \int d^D x d^D y J(x) D(x-y) J(y)$$

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \int d^D x d^D y J(x)^\mu D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)$$

$$W_D(J) = -\frac{1}{2}\kappa_D \int \int d^D x d^D y J(x)^{\mu\nu} D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) J^{\alpha\beta}(y), \quad (3.1)$$

onde  $J(x)$ ,  $J(x)^\mu$ ,  $J(x)^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}(x)$ , sendo  $T^{\mu\nu}(x)$  o tensor energia-momento da relatividade especial, representam as respectivas correntes externas conservadas, e  $D(x-y)$ ,  $D_{\mu\nu}(x-y)$ ,  $D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y)$  são os propagadores correspondentes; enquanto

$$\kappa_D = \left( \frac{D-2}{D-3} \right) G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}, \quad (3.2)$$

é a constante de Einstein  $D$ -Dimensional para  $D > 3$  (veja apêndice A), onde  $G_D$  é a constante de Newton em  $D$  dimensões, e  $\Gamma$  é a função gama. Observe que  $\kappa_D$  reduz-se ao seu valor usual em quatro dimensões, isto é,  $\kappa_4 = 8\pi G_4$ . A constante de Einstein em  $D = 3$ , por sua vez, ao contrário da crença popular, não pode ser relacionada a  $G_3$ , visto que a relatividade geral em  $D = 3$  — que é trivial — não tem limite newtoniano.

Agora, tendo em mente que para uma teoria gravitacional linearizada

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} D_{\mu\nu,\alpha\beta}(k),$$

$$T_{\mu\nu}(k) = \int d^D x e^{-ikx} T_{\mu\nu}(x),$$

obtemos prontamente

$$W_D(J) = -\frac{\kappa_D}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T^{\mu\nu}(k)^* D_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) T^{\alpha\beta}(k), \quad (3.3)$$

que pode ser escrito como

$$W_D(J) = -\frac{\kappa_D}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T^{\mu\nu}(k)^* \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) T^{\alpha\beta}(k), \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)$  é o propagador no espaço dos momenta obtido negligenciando todos os termos do

propagador usual de Feynman no espaço dos momenta que são ortogonais às correntes externas conservadas.

Por outro lado, admitindo que as correntes externas conservadas são independentes do tempo, obtemos de (4),

$$W_D(J) = -\frac{\kappa_D}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \left[ \delta(k^0) \tau \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) \int \int d^{D-1} \mathbf{x} \right. \\ \left. \times d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} T^{\mu\nu}(x) T^{\alpha\beta}(y) \right], \quad (3.5)$$

onde o intervalo de tempo  $\tau$  é produzido pelo factor  $\int dx^0$ .

Porém, manipulações algébricas simples reduzem a Eq.(3.4) a forma

$$W_D(J) = -\kappa_D \tau \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) \Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}), \quad (3.6)$$

onde  $\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)|_{k^0=0}$ , e

$$\Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \int \int d^{D-1} \mathbf{x} d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{T^{\mu\nu}(x) T^{\alpha\beta}(y)}{2}. \quad (3.7)$$

Agora, no caso específico de duas massas  $M_1$  e  $M_2$  localizadas, respectivamente, em  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , a corrente assume a forma

$$T^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} \left[ M_1 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + M_2 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2) \right]. \quad (3.8)$$

Portanto,

$$\Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = M_1 M_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} \eta^{\alpha 0} \eta^{\beta 0}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{r} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ , e

$$W_D(J) = -\kappa_D \tau \frac{M_1 M_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (3.10)$$

Por outro lado,

$$Z_D(J) = \langle 0 | e^{-iH_D \tau} | 0 \rangle = e^{-iE_D \tau}, \quad (3.11)$$

o que implica que,

$$E_D = -\frac{W_D(J)}{\tau}. \quad (3.12)$$

Como consequência, a energia potencial D-dimensional pode ser calculada através da simples expressão

$$E_D(r) = \kappa_D \frac{M_1 M_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (3.13)$$

Destacamos que esta expressão, pode ser facilmente estendida para modelos escalares e vetoriais [4].

### 3.3 $E_D$ para modelos gravitacionais $D$ -dimensionais com derivadas de ordem superior

Modelos gravitacionais com derivadas de ordem superior em  $(3+1)$  dimensões foram sugeridas pela primeira vez por Weyl [5] e Eddington [6]. Grosso modo, eles não eram nada mais que generalizações simples da relatividade geral, obtidos através da ampliação da Lagrangiana de Einstein via os escalares  $R^2$ ,  $R_{\mu\nu}^2$ , e  $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ . Uma discussão interessante sobre esses sistemas clássicos pode ser encontrada no artigo de Havas [7]. Posteriormente foi demonstrado que, devido ao teorema de Gauss-Bonnet, apenas dois dos termos acima mencionados têm de ser

adicionados à Lagrangiana de Einstein.

No entanto, apenas quando foi provado que a gravidade não era renormalizável dentro do esquema perturbativo padrão, a teoria da gravidade com derivadas de ordem superior - até então vista como um mera extensão da relatividade geral - tornou-se de fato uma excelente candidata na longa e difícil busca por uma teoria da gravidade quântica. Nesse sentido, o importante trabalho realizado por Stelle em 1977 [8] - em que foi claramente demonstrado que a teoria da gravidade com derivadas de ordem superior é renormalizável junto com os seus acoplamentos com a matéria - é digno de nota. Infelizmente, esta teoria é não unitária, devido à presença de um fantasma massivo de spin-2. Em 1987, por outro lado, Antoniadis e Tomboulis [9] afirmaram que a presença de um fantasma massivo de spin-2 no propagador despido é inconclusiva, uma vez que esta excitação é instável. De acordo com eles, a posição dos pólos complexos no propagador vestido depende explicitamente do calibre. Usando argumentos padrões da teoria quântica de campos eles chegaram à conclusão de que as teorias gravidade com derivadas de ordem superior são unitárias. Dois anos após o artigo Antoniadis e Tomboulis, Johnston [10] provou que as conjeturas desses autores não estavam corretas uma vez que o par de polos conjugados complexos que aparecem no propagador são independentes do calibre, ou seja, eles são sedentários: sob uma alteração no parâmetro de calibre eles não se movem. Portanto, as teorias gravidade com derivadas de ordem superior são não-unitárias.

Embora a gravidade com derivadas de ordem superior não seja unitária, no âmbito da habitual teoria quântica de campos, isso não implica que ela deva ser rejeitada. De fato, sistemas de gravidade com derivadas de ordem superior podem ser utilizados como modelos efetivos em escalas familiares [11]. Ressaltamos que, neste sentido, muitos estudos interessantes relacionados com a teoria da gravidade com derivadas de ordem superior têm sido feitos recentemente [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Assim, devido ao grande interesse que essa teoria tem despertado na literatura, estudamos o papel desempenhado pelas derivadas de ordem superior neste modelo através da análise de sua energia potencial  $D$ -dimensional interpartículas. Ao fazê-lo, estabelecemos claramente que a nossa prescrição para se obter o potencial  $D$ -dimensional é muito simples e trivial. Além disso, o estudo aludido nos permitiu

descobrir as dimensões em que potenciais livres de singularidade na origem, produzido pelas derivadas de mais alta ordem, existem.

A gravidade  $D$ -dimensional com derivadas de ordem superior pode ser definida de acordo com a Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{HDG}} = \sqrt{(-1)^{D-1}g} \left[ \frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2} R_{\mu\nu\lambda\rho}^2 \right], \quad (3.14)$$

onde  $\sigma = \pm 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  são constantes arbitrárias, e  $\kappa^2 = 4\kappa_D$ .

No entanto, o termo  $R_{\mu\nu\lambda\rho}^2$  não necessita ser considerado para o cálculo do propagador uma vez que o invariante linearizado de Gauss-Bonnet é uma derivada total em qualquer dimensão do espaço-tempo; a restrição  $D = 4$  aparece apenas quando levamos em conta a estrutura não-linear completa [19]. Assim, o propagador pode ser encontrado a partir da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{D-1}g} \left[ \frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right]. \quad (3.15)$$

Vamos então calcular o propagador para o modelo gravitacional da equação (3.15) [20]. Para fazer isso, lembramos que para pequenas flutuações em torno da métrica Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , a métrica completo assume a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}.$$

Linearizando a equação (3.15) de acordo com a métrica acima e adicionando ao resultado a densidade de Lagrangeana que fixa o calibre,  $\mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu \gamma^{\mu\nu})^2$ , onde  $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$  e  $\lambda$  é um parâmetro de calibre, que corresponde ao calibre de de Donder, encontramos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{O}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta},$$

onde, no espaço dos momenta,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} = & \left( \sigma + \frac{\beta \kappa^2 k^2}{4} \right) k^2 P^{(2)} + \frac{k^2}{2\lambda} P^{(1)} + \frac{k^2}{4\lambda} P^{(0-\omega)} - \frac{k^2}{4\lambda} \sqrt{D-1} \left[ P^{(0-s\omega)} \right. \\
& \left. + P^{(0-\omega s)} \right] + \left[ - (D-2)\sigma + (D-1)\alpha \kappa^2 k^2 + D \frac{\beta \kappa^2 k^2}{4} \right. \\
& \left. + (D-1) \frac{1}{4\lambda} \right] k^2 P^{(0-s)}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Invertendo este operador encontramos o propagador para a gravidade  $D$ -dimensional com derivadas de ordem superior, ou seja

$$\begin{aligned}
D = & \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_2^2} \right] P^{(2)} + \frac{2\lambda}{k^2} P^{(1)} \\
& + \frac{1}{\sigma(D-2)} \left[ \frac{1}{k^2 - m_0^2} - \frac{1}{k^2} \right] P^{(0-s)} \\
& + \left[ \frac{4\lambda}{k^2} + \frac{(D-1)m_0^2}{\sigma k^2 (k^2 - m_0^2)(D-2)} \right] P^{(0-\omega)} \\
& + \frac{\sqrt{D-1} m_0^2}{(D-2)\sigma k^2 (k^2 - m_0^2)} \left[ P^{(0-s\omega)} + P^{(0-\omega s)} \right], \tag{3.17}
\end{aligned}$$

onde  $\{P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(0-\omega s)}\}$  é o conjunto usual dos operadores de Barnes-Rivers (veja apêndice B),  $D \equiv \mathcal{O}^{-1}$ , e

$$m_2^2 \equiv -\frac{4\sigma}{\beta \kappa^2}, \quad m_0^2 \equiv \frac{4\sigma(D-2)}{\kappa^2 [4\alpha(D-1) + D\beta]}. \tag{3.18}$$

Onde assumimos que  $m_2^2 > 0$  e  $m_0^2 > 0$ , para evitar táquions no modelo.

A partir da equação (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mu\nu, \kappa\lambda}(\mathbf{k}) = & \frac{1}{\sigma} \left\{ \left[ -\frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} \right] \left[ \frac{1}{2} \left( \eta_{\mu\nu} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa} \right) - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} \eta_{\kappa\lambda} \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \left[ \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \right] \eta_{\mu\nu} \eta_{\kappa\lambda} \right\}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sigma} \left( -\frac{D-3}{D-2} \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} - \frac{1}{(D-1)(D-2)(\mathbf{k}^2 + m_0^2)} \right). \quad (3.20)$$

Logo a energia potencial para a interação de duas massas pontuais  $M_1$  e  $M_2$  localizadas, respectivamente, em  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , pode ser calculada através da expressão

$$E_D(r) = -\frac{\kappa_D M_1 M_2}{\sigma (2\pi)^{D-1}} \left[ \frac{(D-3)}{(D-2)} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{(D-2)}{(D-1)} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{(D-2)(D-1)} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right], \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{r} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ .

Portanto, para  $D > 3$

$$E_D(r) = \frac{\kappa_D M_1 M_2}{\sigma (2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ -\left( \frac{D-3}{D-2} \right) \frac{\Gamma(\frac{D-3}{2})}{r^{D-3}} 2^{\frac{D-5}{2}} + \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \left( \frac{m_2}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} \times K_{\frac{D-3}{2}}(m_2 r) - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \left( \frac{m_0}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_0 r) \right], \quad (3.22)$$

enquanto que, para  $D = 3$

$$E_3(r) = \frac{\kappa_3 M_1 M_2}{4\pi\sigma} \left[ K_0(m_2 r) - K_0(m_0 r) \right], \quad (3.23)$$

onde  $\Gamma$  é a função gama, e  $K_\nu$  é a função de Bessel modificada de segunda ordem de ordem  $\nu$ .

Lenvando em consideração que  $K_\nu(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right)$  para  $r \rightarrow \infty$ , é fácil de ver que (3.22) corresponde assintoticamente a energia potencial newtoniana se e somente se  $\sigma = +1$ . Portanto, a partir de agora assumimos que  $\sigma = +1$  para  $D > 3$ . Por outro lado, a equação (3.23) reproduz para  $r \rightarrow \infty$  a energia potencial tridimensional correspondente a gravidade de Einstein.

Estamos agora preparados para analisar o comportamento a pequenas distâncias da energia gravitacional interpartículas. Para realizar essa tarefa, temos de considerar duas situações possíveis:  $D > 3$  e  $D = 3$ .

### 3.3.1 $D > 3$

Neste caso, temos de considerar se  $\nu \notin N$  ou  $\nu \in N$ . Assumindo que  $\nu \notin N$  e lembrando que para  $r \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}
K_\nu(r) \sim & \frac{1}{2} \left[ \Gamma(\nu) \left(\frac{2}{r}\right)^\nu \left(1 + \frac{r^2}{4(1-\nu)} + \frac{r^4}{32(1-\nu)} \right. \right. \\
& \times \left. \frac{1}{(2-\nu)} + \dots \right) + \Gamma(-\nu) \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \left(1 + \frac{r^2}{4(\nu+1)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{r^4}{32(\nu+1)(\nu+2)} + \dots \right) \right], \tag{3.24}
\end{aligned}$$

chegamos à conclusão que se  $D$  é um número par há um e somente um modelo gravitacional completo com derivadas de ordem superior (um sistema sem nenhuma relação especial entre  $\alpha$  e  $\beta$ ), que é finito em  $r = 0$ : a gravidade com derivadas de ordem superior em quatro dimensões. É surpreendente, no entanto, que, se  $D = 6$  e  $\alpha = -\frac{5}{6}\beta$ , existe um modelo com derivadas de ordem superior que é finito em  $r = 0$  (ver Figura 1). A correspondente energia potencial gravitacional na origem assume a forma

$$E_6(0) = -\frac{16}{45} G_6 M_1 M_2 m_2^3 \quad (m_0^2 = 16m_2^2). \tag{3.25}$$

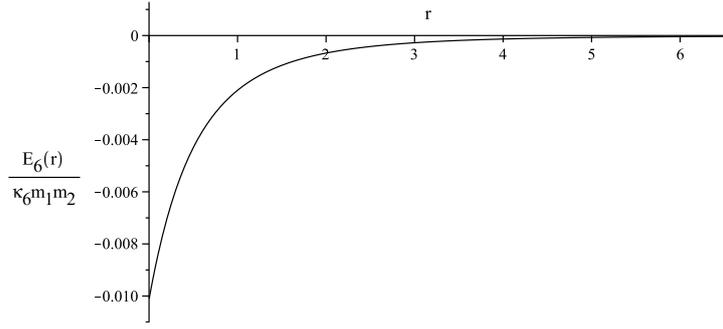


Figura 3.1: Energia potencial gravitacional  $E_6$  em função da distância.

Por outro lado, se  $\nu \in N$ ,

$$\begin{aligned}
K_\nu(r) = & (-1)^{\nu-1} \ln\left(\frac{r}{2}\right) \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}}{k!(k+\nu)!} + \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k (\nu-k-1)!}{k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} + \\
& \frac{(-1)^\nu}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+\nu+1)}{k!(k+\nu)!} \\
& \times \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

onde  $\psi(r) \equiv \frac{d}{dr} \ln \Gamma(r)$  é a função psi. Infelizmente, se  $D$  é um número ímpar os sistemas correspondentes com derivadas de ordem superior são singulares em  $r = 0$ . No entanto, se  $D = 5$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}\beta$ , o modelo resultante é não singular na origem. Nesse caso,

$$E_5(0) = -\frac{9}{32} G_5 M_1 M_2 m_2^2 \ln 3 \quad (m_0^2 = 9m_2^2). \tag{3.27}$$

Basicamente, os nossos resultados podem ser resumidos da seguinte forma: existe apenas um modelo geral que é finito a pequenas distâncias para  $D > 3$  — a gravidade geral com derivadas de ordem superior em  $D = 4$ ; no entanto, se  $D = 5$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}\beta$ , assim como se  $D = 6$  e  $\alpha = -\frac{5}{6}\beta$ , os modelos resultantes são não singulares em  $r = 0$ .

### 3.3.2 $D = 3$

Neste caso, os modelos gerais com  $\sigma \pm 1$  são não singulares na origem e as expressões para as energias potenciais correspondentes em  $r = 0$  são

$$\sigma = -1, \quad E_3(0) = \frac{\kappa_3 M_1 M_2}{4\pi} \ln \frac{m_2}{m_0} \quad (m_2 < m_0);$$

$$\sigma = +1, \quad E_3(0) = \frac{\kappa_3 M_1 M_2}{4\pi} \ln \frac{m_0}{m_2} \quad (m_0 < m_2).$$

## 3.4 Encontrando a amplitude de Feynman não relativística $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ através da nossa prescrição

Obviamente, os cálculos feitos através dos diagramas de Feynman devem coincidir no limite não relativístico com aqueles vindos da mecânica quântica, onde a interação entre as partículas é descrita por um potencial energético  $E_D$ . Nosso objetivo aqui é comparar as secções de choque para a interação de duas partículas, obtidas respectivamente, utilizando em primeiro lugar a mecânica quântica e posteriormente o limite não relativístico da teoria quântica de campos, a fim de encontrar uma expressão para calcular a energia potencial  $E_D$  entre elas.

Começamos recordando uma expressão muito conhecida da mecânica quântica, ou seja, a fórmula da seção de choque para o espalhamento elástico (em primeira ordem, ou seja, na aproximação de Born) para uma partícula de massa  $m$  em uma potencial central  $E_D(r)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (3.28)$$

onde

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi} \int d^{D-1}\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} E_D(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (3.29)$$

Aqui,  $\theta$  é o ângulo de espalhamento,  $\mathbf{k}$  o momento incidente, e  $\mathbf{k}'$  o momento de saída ( $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ )

já que estamos considerando um processo elástico).

Vamos, então, fazer uma comparação deste resultado com o obtido através do formalismo relativístico. Por uma questão de clareza, vamos considerar a dispersão de uma partícula não-relativística de momento  $\mathbf{k}$  e massa  $m$ , com  $|\mathbf{k}| \ll m$ , por um alvo pesado  $A$ , com massa  $M_A \gg m$ . Podemos imaginar, por exemplo, um elétron que está sendo espalhado por um átomo. Como  $|\mathbf{k}| \ll m \ll M_A$ , o recuo do átomo pode ser negligenciado. Nesta discussão consideraremos somente espalhamento elástico. Vamos supor também que a partícula incidente e a partícula  $A$  interagem através da troca de um bóson gravitacional com ou sem massa.

Supondo que  $M_A$  é muito maior do que a energia do elétron, a secção de choque elástica é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 M_A^2} |\mathcal{M}|^2, \quad (3.30)$$

onde  $\mathcal{M}$  é a amplitude de Feynman para o processo em questão. Denotando, por sua vez, a amplitude Feynman no limite não relativístico por  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ , obtemos [23]

$$\mathcal{M} = (2m)(2M_A)\mathcal{M}_{\text{NR}}, \quad (3.31)$$

o que nos permite escrever a equação (3.30) na forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 |\mathcal{M}_{\text{NR}}|^2. \quad (3.32)$$

Das equações (3.28) e (3.32), encontramos

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \int d^{D-1}\mathbf{r} E_D e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  é o momento trocado. Note que a fase de (3.33) foi escolhida de tal maneira que uma força repulsiva (potencial positivo) corresponde a  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$  positivo.

Portanto,

$$E_D = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int \mathcal{M}_{\text{NR}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^{D-1}\mathbf{q}. \quad (3.34)$$

Vale a pena notar que, no caso de dois férmions idênticos o elemento de matriz  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$  que aparece em (3.34) é apenas a parte do elemento da matriz covariante que corresponde ao espalhamento direto pois o uso de funções de onda anti-simétricas em mecânica ondulatória não-relativística automaticamente leva em conta as contribuições devido à interação de troca [24].

Agora, uma vez que em primeira ordem os métodos desenvolvidos nas Seções (2) e (4) são equivalentes, chegamos à conclusão de que

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = M_1 M_2 \kappa_D \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (3.35)$$

Portanto, a nossa prescrição produz um bônus adicional: a expressão trivial para o cálculo de  $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ .

Podemos ilustrar a eficácia e a simplicidade deste resultado através de um exemplo: a interação de duas massas  $M_1$  e  $M_2$  no contexto da gravidade  $D$ -dimensional com derivadas de ordem mais alta. A partir de (3.20), temos

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = M_1 M_2 \kappa_D \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (3.36)$$

onde (veja equação (3.18)),

$$m_2^2 \equiv -\frac{4\sigma}{\beta\kappa^2}, \quad m_0^2 \equiv \frac{4\sigma(D-2)}{\kappa^2[4\alpha(D-1) + D\beta]}. \quad (3.37)$$

Logo, temos que, se  $D > 3$ ,

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = M_1 M_2 \kappa_D \left( -\frac{D-3}{D-2} \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} - \frac{1}{(D-1)(D-2)(\mathbf{k}^2 + m_0^2)} \right), \quad (3.38)$$

enquanto para  $D = 3$ ,

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \frac{1}{2} M_1 M_2 \kappa_3 \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \right), \quad (3.39)$$

com  $\sigma = \pm 1$ .

Ressaltamos que é um trabalho muito difícil calcular, através de métodos tradicionais, a amplitude de Feynman não-relativística relacionada com este exemplo específico [21].

### 3.5 Considerações Finais

Desenvolvemos uma prescrição trivial para calcular a energia potencial gravitacional em modelos gravitacionais  $D$ -dimensionais. A parte essencial do método consiste em encontrar o propagador  $\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})$ , que é um cálculo bastante direto. A energia potencial gravitacional pode então ser facilmente encontrada por meio da expressão

$$E_D(r) = \kappa_D \frac{M_1 M_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (3.40)$$

Essa prescrição pode também ser utilizada para encontrar  $E_D$  para a interação entre duas cargas escalares estáticas,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , bem como para a interação de duas cargas estáticas  $Q_1$  e  $Q_2$ . No primeiro caso

$$E_D(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}(\mathbf{k}),$$

enquanto no último [4],

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}).$$

Obtivemos também uma expressão trivial para o cálculo da amplitude de Feynman no limite não relativístico ( $\mathcal{M}_{\text{NR}}$ ), como um efeito colateral da nossa prescrição. Se apelarmos para métodos ortodoxos ao realizarmos esses cálculos, seremos geralmente confrontados com

um trabalho extenso uma vez que esses processos são mediados por grávitons.

Para concluir, vale comentar sobre um modelo gravitacional em três dimensões com derivadas de ordem superior, definido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[ -\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left( R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) \right], \quad (3.41)$$

onde  $\alpha = -\frac{3}{8}\beta$  ( $\beta \equiv \frac{4}{\kappa^2 m_2^2}$ ), e  $\sigma = -1$ . Este sistema, "batizado" de modelo BHT (ou nova gravidade massiva), é o único modelo conhecido até agora que é unitário em nível de árvore [15, 16]. Sendo assim, vale a pena analisar o comportamento de  $E_3$  para este modelo. A origem do modelo BHT é, obviamente, a gravidade com derivadas de ordem mais alta em três dimensões com  $\sigma = -1$  e  $m_2 < m_0$ , como mostrado na figura 2. Examinando esta figura vemos claramente que enquanto  $m_0$  torna-se cada vez maior, a energia potencial do sistema rapidamente se aproxima da energia do modelo BHT e, eventualmente, as duas energias se fundem. Sendo assim, para se chegar a energia potencial do modelo BHT a partir daquela encontrada com o modelo geral em três dimensões, esta última deve, necessariamente, tornar-se singular na origem, o que ocorre no limite  $m_0 \rightarrow \infty$ . É notável que esta é precisamente a condição para evitar, ao nível da árvore, o fantasma massivo de spin-0 que assombra o modelo geral da gravidade em  $3D$  com derivadas de ordem superior. Conseqüentemente, a presença da singularidade no potencial BHT está, em certo sentido, relacionada a ausência do fantasma em nível de árvore; em outras palavras, unitariedade no nível de árvore e a existência de uma singularidade no potencial estão de alguma forma correlacionados. Por outro lado, os modelos gravitacionais em  $3D$  com derivadas de ordem mais alta são renormalizáveis para ambos os valores de  $\sigma$ , mas o sistema BHT é não-renormalizável [18]. No diagrama ilustrado na figura 3, está representado o comportamento dos modelos gravitacionais com derivadas de ordem superior em  $3D$ , no que concerne a sua unitariedade e renormalizabilidade. Um olhar superficial neste diagrama parece sugerir que em  $3D$  um sistema unitário está correlacionado com um potencial singular na origem, enquanto um modelo renormalizável está relacionado com um potencial finito na origem. Isso, pelo menos à primeira vista, aparentemente explica porque não podemos

ter uma convivência pacífica entre estas propriedades no âmbito dos modelos gravitacionais com derivadas de ordem superior em  $3D$  [25].

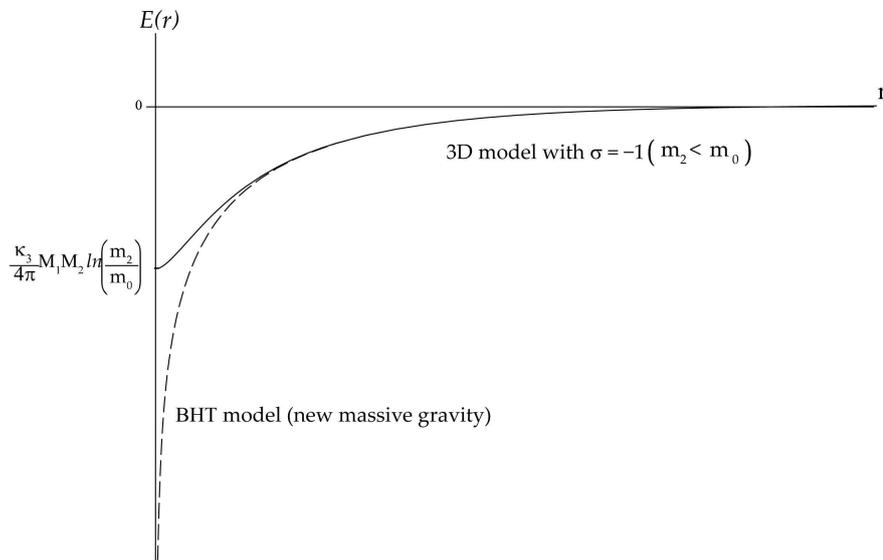


Figura 3.2: Energia potencial gravitacional para ambos os modelos em  $3D$  com  $\sigma = -1$  e  $m_2 < m_0$  (linha contínua), e para o modelo BHT (linha tracejada).

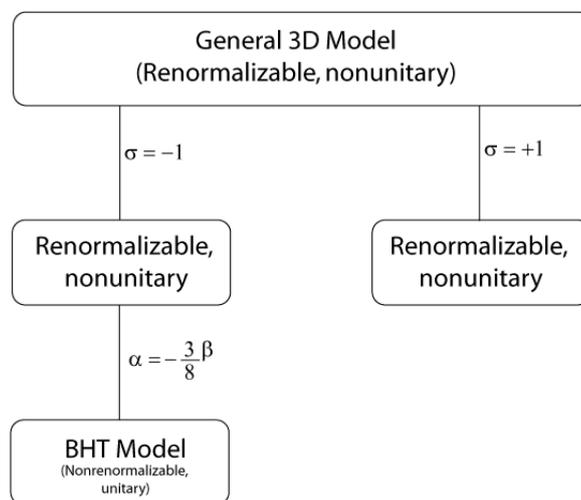


Figura 3.3: Renormalização versus unitariedade para o modelo geral em  $3D$ .

### 3.A A Constante de Einstein $D$ -dimensional

Começamos escrevendo a equação de Poisson  $D$ -dimensional, ou seja,

$$\nabla_{D-1}^2 \Phi_D(\mathbf{x}) = G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \rho, \quad (3.42)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa.

Por outro lado, a métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas é

$$ds^2 = \left[ \frac{1 + \frac{1}{2}\Phi_D(\mathbf{x})}{1 - \frac{1}{2}\Phi_D(\mathbf{x})} \right]^2 dt^2 - \left[ 1 - \frac{1}{2}\Phi_D(\mathbf{x}) \right]^{\frac{4}{D-3}} \left[ (dx^1)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2 \right]. \quad (3.43)$$

No limite newtoniano, ou seja, muito longe das distribuições de massa, a métrica anterior assume a forma

$$ds^2 = \left[ 1 + 2\Phi_D(\mathbf{x}) \right] dt^2 - \left[ 1 - \frac{2}{D-3}\Phi_D(\mathbf{x}) \right] \left[ (dx^1)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2 \right]. \quad (3.44)$$

Substituindo (A.3) nas equações de Einstein, ou seja,  $G_{\mu\nu} = \kappa_D T_{\mu\nu}$ , encontramos

$$G_{00} = \kappa_D \rho = \frac{D-2}{D-3} \nabla_{D-1}^2 \Phi_D(\mathbf{x}). \quad (3.45)$$

Portanto, chegamos à conclusão de que

$$\kappa_D = \frac{D-2}{D-3} G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}, \quad D > 3. \quad (3.46)$$

Tabela 3.1: Tabela Multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers.

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

### 3.B Operadores de Barnes-Rivers $D$ -dimensionais

O conjunto completo dos operadores de Barnes-Rivers no espaço dos momenta é dado por

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{(D-1)}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (3.47)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda}), \quad (3.48)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{(D-1)}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (3.49)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (3.50)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (3.51)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (3.52)$$

onde  $\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$  e  $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$  são, respectivamente, os operadores de projeção transversal e longitudinal usuais. A tabela multiplicativa para estes operadores é exibida na Tabela 1.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Zee 2010 *Quantum Field Theory in a Nutshell* 2nd ed (Princeton University Press).
- [2] L. Schulman 2005 *Techniques and Applications of Path Integration* (Dover Publications, Inc).
- [3] L. Ryder 1996 *Quantum Field Theory* 2nd ed (Cambridge University Press).
- [4] A. Accioly , J. Helayël-Neto , F. E. Barone, F. A. Barone and P. Gaete, Phys. Rev. D **90**, 105029 (2014).
- [5] H. Weyl 1952 *Space-Time Matter* (Dover).
- [6] A. Eddington, 1924 *The Mathematical Theory of Relativity* 2nd ed (Cambridge University Press).
- [7] P. Havas, General Relativity and Gravitation **8**, 631 (1977).
- [8] K. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [9] I. Antoniadis and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **33**, 2756 (1986).
- [10] D. Johnston, Nucl. Phys. B **297**, 721 (1988).
- [11] T. Soritiou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
- [12] I. Buchbinder, S. Odintsov and I. Shapiro, 1992 *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP).
- [13] G. de Berredo-Peixoto and I. Shapiro, Phys. Rev. D **70**, 044024 (2004).

- [14] G. de Berredo-Peixoto and I. Shapiro, Phys. Rev. D **71**, 064005 (2005).
- [15] E. Bergshoeff, O. Holm and P. Townsend, Phys. Rev. Lett. **102**, 201301 (2009).
- [16] E. Bergshoeff, O. Holm and P. Townsend, Phys. Rev. D **79**, 124042 (2009).
- [17] I. Oda, J. High Energy Phys. **05**, 064 (2009).
- [18] K. Muneyuki and N. Ohta, Phys. Rev. D **85**, 101501 (2012).
- [19] A. Accioly, A. Azeredo and H. Mukai, J Math Phys **43**, 473 (2002).
- [20] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais J, R. Turcati and B. Pereira-Dias, Class. Quantum Grav. **28**, 225008 (2011).
- [21] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena and R. Turcati, Phys. Rev. D **83**, 104005 (2011).
- [22] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Pereira-Dias and C. Hernaski, Phys. Rev. D **86**, 105046 (2012).
- [23] M. Maggiore 2005 *A Modern Introduction to Quantum Field Theory* (Oxford University Press).
- [24] J. Sakurai 1967 *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company).
- [25] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena and R. Turcati, Int. J. Mod. Phys. D **22**, 1342015 (2013).

# Capítulo 4

## Propagação dispersiva do fóton em gravidade com derivadas de ordem superior

### 4.1 Introdução

É bem sabido que a relatividade geral apresenta divergências ultravioletas indomáveis dentro do esquema de perturbação padrão. Em princípio, uma maneira de sair dessa dificuldade seria a construção de uma teoria na qual estas divergências possam ser colocados sob controle. Nesse sentido, as teorias de gravidade com derivadas de ordem mais alta são boas candidatas para isso em geral, uma vez que a presença dos termos de ordem superior permite domar estas divergências ultravioletas.

A gravidade com derivadas de ordem mais alta, ou seja, o sistema definido pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 - \mathcal{L}_M \right], \quad (4.1)$$

onde  $\kappa^2 = 32\pi G$ , com  $G$  sendo a constante de Newton,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes, e  $\mathcal{L}_M$  a densidade de Lagrangiana para a matéria usual, é renormalizável [1, 2, 3, 4]; infelizmente, ela é assombrada

por fantasmas, sendo em consequência, não unitária. Aliás, as teorias com derivadas de ordem superior são, em geral, assombradas por fantasmas. Ressaltamos, entretanto, que a presença de derivadas de ordem superior em um modelo não significa que ele deva ser rejeitado. Na verdade, os sistemas com derivadas de ordem superior podem ser utilizados como teorias de campo efetivas em escalas conhecidas. A gravidade com derivadas de ordem mais alta, por exemplo, tem sido freqüentemente utilizada em aplicações cosmológicas interessantes e úteis [5].

Tendo em mente, por outro lado, que a gravidade com derivadas de ordem mais alta é a única teoria da gravidade que, até agora, é sabidamente renormalizável, é importante encontrarmos limites sobre as suas constantes ( $\alpha$  and  $|\beta|$ ).

Nosso principal objetivo aqui é obter um limite superior para  $|\beta|$ . Para fazer isso, consideraremos a dispersão de um fóton por um campo gravitacional externo fraco, descrito pela gravidade com derivadas de ordem superior linearizada. Uma vez que o setor  $R^2$  da teoria não contribui em nada para o processo de espalhamento, este método não pode ser usado para obter um limite para a constant  $\alpha$ .

Antes de continuarmos, vamos mostrar que a gravidade de ordem mais alta é unitária na escala de energia com a qual vamos lidar neste trabalho. Para fazer isso, faremos uso de um método pioneiro devido a Veltman [6] que consiste em saturar o propagador com correntes conservadas externas e calcular depois disso os resíduos nos pólos simples do propagador saturado acima mencionado. Se os resíduos de todos os pólos são positivos ou nulos, o modelo é unitário ao nível de árvore, mas se pelo menos um dos resíduos é negativo, o sistema não é unitário ao nível da árvore. Agora, o propagador relacionado a gravidade em questão é dado no calibre de de Donder e no espaço dos momenta por [7]

$$D = \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_0^2} \right] P^{(2)} + \frac{2\lambda}{k^2} P^{(1)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k^2 - m_0^2} - \frac{1}{k^2} \right] P^{(0-s)} + \left[ \frac{4\lambda}{k^2} + \frac{3m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \right] P^{(0-w)} + \frac{\sqrt{3}m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \left[ P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)} \right], \quad (4.2)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro de calibre,  $\{P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(0-ws)}\}$  é o conjunto dos operadores de

Barnes-Rivers usuais, e

$$m_2^2 \equiv -\frac{4}{\beta\kappa^2}, \quad m_0^2 \equiv \frac{2}{\kappa^2[3\alpha + \beta]}. \quad (4.3)$$

Estamos assumindo, obviamente, que  $m_2^2 > 0$  ( $\beta < 0$ ) and  $m_0^2 > 0$  ( $3\alpha + \beta > 0$ ), de modo a evitar táquions no modelo.

Por outro lado, o propagador saturado no espaço dos momenta,  $SP(k)$ , é dado por

$$SP(k) = T_{\mu\nu}(k)D^{\mu\nu,\alpha\beta}(k)T_{\alpha\beta}(k) = \frac{A}{k^2} - \frac{B}{k^2 - m_2^2} + \frac{C}{k^2 - m_0^2}.$$

Aqui

$$A \equiv T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{2}, \quad B \equiv T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{3}, \quad C \equiv \frac{T^2}{6}.$$

Vamos supor que  $k^2 \ll m_2^2$ . Consequentemente,

$$SP(k) = \frac{A}{k^2} + \frac{C}{k^2 - m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{m_2^2}\right).$$

Agora, tendo em mente que, para um gráviton sem massa

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{2}\right)\Big|_{k^2=0} > 0 \quad (\text{veja a Ref. 8}),$$

chegamos à conclusão de que

$$Res(SP)|_{k^2=0} > 0, \quad Res(SP)|_{k^2=m_0^2} > 0.$$

Portanto, em energias familiares, HDG é unitária ao nível de árvore. Como consequência, nesta escala não precisamos ter medo do fantasma massivo de spin-2 .

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 é encontrada a solução geral da gravidade linearizada com derivadas de ordem mais alta gerada por uma partícula pontual e no calibre de Teyssandier [9]. A propagação de um fóton ao nível de árvore em um campo

gravitacional de fundo descrito pela gravidade de ordem superior é então considerado na Seção 3. Observamos que essa propagação é dispersiva (dependente da energia). Na Seção 4 o módulo do ângulo no qual o espectro visível seria distribuído no caso de um fóton passando perto do Sol é representado em função da constante  $|\beta|$  e um limite superior para  $|\beta|$  é obtido, o qual melhora muito o limite disponível na literatura [10, 11]. Nossas conclusões são apresentadas na Seção 5.

Utilizamos unidades naturais ao longo do capítulo e a métrica de Minkowski é diag (1, -1, -1, -1).

## 4.2 Solução geral para as equações de campo da gravidade linearizada com derivadas de ordem mais alta no calibre de Teyssandier

A variação da ação  $S$  com respeito à métrica  $g_{\mu\nu}$  conduz às equações de campo relacionadas com a gravidade clássica com derivadas de ordem mais alta. Efetuando a variação, obtemos prontamente

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa^2} G_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\lambda}^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right] \\ + \frac{\alpha}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right] + \frac{1}{2} \Theta_{\mu\nu} = 0, \end{aligned}$$

onde  $\Theta_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento.

Na aproximação de campo fraco, ou seja,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ , as equações de campo anteriores reduzem-se a

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \left[ -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{6\kappa} R^{(\text{lin})} \eta_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) = \frac{\kappa}{4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right), \quad (4.4)$$

onde

$$R^{(\text{lin})} = \frac{\kappa}{2} \square h - \kappa \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu},$$

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h,$$

$$\Gamma_\mu \equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\kappa}{2}R^{(\text{lin})}{}_{,\mu}.$$

Aqui os índices são levantados (abaixados) com  $\eta^{\mu\nu}$  ( $\eta_{\mu\nu}$ ), e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento da relatividade especial.

A equação (4.4) é invariante sob a transformação de coordenadas  $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = x^\mu + \kappa\Lambda^\mu(x)$ , que deve ser infinitesimal para evitar inconsistências com a equação  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ . Sob essa transformação,

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}),$$

$$\gamma_{\mu\nu} \rightarrow \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \left(\Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\Lambda^\lambda{}_{,\lambda}\right),$$

$$R^{(\text{lin})} \rightarrow \bar{R}^{(\text{lin})} = R^{(\text{lin})},$$

$$\Gamma_\mu \rightarrow \bar{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu - \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\square\Lambda_\mu. \quad (4.5)$$

Por outro lado, o calibre de Teyssandier é definido pela condição subsidiária  $\Gamma_\mu = 0$  sobre os potenciais. Vamos, então, mostrar como este calibre pode ser atingido, assumindo que inicialmente  $\Gamma_\mu \neq 0$ . Um breve olhar sobre (4.5) mostra claramente que a condição para o anulamento de  $\bar{\Gamma}_\mu$  pode ser alcançado escolhendo  $\Gamma_\mu = \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\square\Lambda_\mu$ . Supondo agora que esta condição seja satisfeita, a solução geral da equação (4.4) é dada pela soma algébrica [9, 12]

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} - \phi\eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

onde  $h_{\mu\nu}^{(E)}$  é a solução das equações de Einstein linearizadas no calibre de Donder, ou seja,

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left[ \frac{T\eta_{\mu\nu}}{2} - T_{\mu\nu} \right], \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0, \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(E)},$$

enquanto  $\phi$  and  $\psi_{\mu\nu}$  satisfazem, respectivamente, as equações

$$\left(\square + m_0^2\right)\phi = \frac{\kappa T}{12}, \quad \left(\square + m_2^2\right)\psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu} \right], \quad \square\psi = \psi_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Estamos prontos para encontrar a solução geral das equações de campo da gravidade linearizada com derivadas de ordem mais elevada tendo como fonte uma partícula pontual de massa  $M$  localizada em  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Tendo em conta que o correspondente tensor energia-momento é dado por  $T_{\mu\nu} = M\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\delta^3(\mathbf{r})$ , prontamente obtemos

$$h_{\mu\nu}(r) = h_{\mu\nu}^{(E)}(r) + h_{\mu\nu}^{(R^2)}(r) + h_{\mu\nu}^{(R^2_{\mu\nu})}(r), \quad (4.8)$$

com

$$h_{\mu\nu}^{(E)}(r) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[ \frac{\eta_{\mu\nu}}{r} - \frac{2\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}}{r} \right],$$

$$h_{\mu\nu}^{(R^2)}(r) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[ -\frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \eta_{\mu\nu} \right],$$

$$h_{\mu\nu}^{(R^2_{\mu\nu})}(r) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[ -\frac{2}{3} \frac{e^{-m_2 r}}{r} \eta_{\mu\nu} + 2 \frac{e^{-m_2 r}}{r} \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0} \right].$$

O potencial para a gravidade em questão, por sua vez, é dado pela expressão

$$\frac{\kappa}{2}h_{00}(r) \equiv V = MG \left[ -\frac{1}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_2 r}}{r} \right], \quad (4.9)$$

que concorda assintoticamente com o potencial Newtoniano. Vale ressaltar que esse potencial poderia ter sido obtido sem apelar para as equações de campo, conforme vimos nos capítulos

anteriores [7, 13].

### 4.3 A propagação dispersiva do fóton

Consideramos agora a dispersão de um fóton por um campo gravitacional externo fraco, dado por (4.8).

A amplitude de Feynman para o espalhamento representado na Fig.1 é dada pela

$$\mathcal{M}_{rr'} = \frac{1}{2} \kappa h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) \left[ -\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} p p' + \eta_{\lambda\rho} p'_\mu p_\nu + 2 \left( \eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} p p' \right) \right] \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}'), \quad (4.10)$$

onde  $\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})$  and  $\epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}')$  são os vetores de polarização para os fótons iniciais e finais, respectivamente, os quais satisfazem a relação de completudeza

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{p}) = -\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{(pn)^2} + \frac{p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu}{pn}, \quad (4.11)$$

onde  $n^2 = 1$ . Aqui  $h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k})$  é o campo gravitacional no espaço dos momenta, isto é,

$$h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{r}). \quad (4.12)$$

Portanto,

$$h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) = h_{\text{ext}}^{(\text{E})\lambda\rho}(\mathbf{k}) + h_{\text{ext}}^{(\text{R}^2_{\mu\nu})\lambda\rho}(\mathbf{k}) + h_{\text{ext}}^{(\text{R}^2)\lambda\rho}(\mathbf{k}), \quad (4.13)$$

com

$$h_{\text{ext}}^{(\text{E})\mu\nu}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa M}{4\mathbf{k}^2} \eta^{\mu\nu} - \frac{\kappa M}{2} \frac{\eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}}{\mathbf{k}^2},$$

$$h_{\text{ext}}^{(R^2)_{\alpha\beta}\mu\nu}(\mathbf{k}) = -\frac{\kappa M}{6} \frac{\eta^{\mu\nu}}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} + \frac{\kappa M}{2} \frac{\eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}}{\mathbf{k}^2 + m_2^2},$$

$$h_{\text{ext}}^{(R^2)\mu\nu}(\mathbf{k}) = -\frac{\kappa M}{12} \frac{\eta^{\mu\nu}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2}.$$

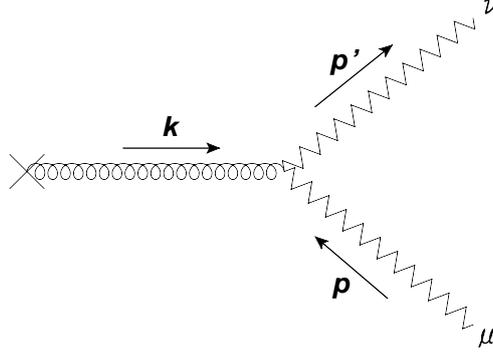


Figura 4.1: Espalhamento do fóton por um campo gravitacional externo. Aqui  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ .

A seção de choque transversal não polarizada pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \sum_r \sum_{r'} \mathcal{M}_{rr'}^2 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\kappa^4 M^2 E^4 (1 + \cos \theta)^2}{16} \left[ -\frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} \right]^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $E$  é a energia do fóton incidente e  $\theta$  é o ângulo de espalhamento.

Para pequenos ângulos (4.14) reduz-se a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 16G^2 M^2 \left[ -\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} \right]^2. \quad (4.15)$$

Este resultado sinaliza um espalhamento dependente da energia.

É fácil ver a partir de (4.15) que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow 0, \quad \text{se } \frac{m_2}{E} \rightarrow 0,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \left(\frac{4GM}{\theta^2}\right)^2, \text{ se } \frac{m_2}{E} \rightarrow \infty;$$

em outras palavras, se  $\frac{m_2}{E} \rightarrow 0$ , não há dispersão, enquanto que se  $\frac{m_2}{E} \rightarrow \infty$ , recuperamos a seção de choque transversal padrão de Einstein. Ambos os resultados são fisicamente compatíveis.

Agora, a fim de chegar a uma trajetória de partícula clássica a partir de (4.15), comparamos as fórmulas da seção de choque clássica e ao nível árvore [14, 15]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 16G^2 M^2 \left[ -\frac{1}{\theta^2} + \frac{E^2}{E^2\theta^2 + m_2^2} \right]^2 = -\frac{rdr}{\theta d\theta}. \quad (4.16)$$

Efetuada a integração descobrimos prontamente que para um fóton passando próximo ao Sol a equação acima fornece o seguinte resultado

$$\frac{1}{\theta_E^2} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} + \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\theta^2}{\lambda^2 + \theta^2} - \Omega, \quad (4.17)$$

onde  $\theta_E \equiv \frac{4GM}{R}$ , com  $R$  e  $M$  sendo o raio e a massa do Sol, e  $\lambda^2 \equiv \frac{m_2^2}{E^2}$ . Aqui  $\Omega$  é uma constante de integração. Assim, a propagação de fótons dentro do contexto da gravidade com derivadas de ordem superior é dispersiva (dependente da energia). No entanto, pode-se mostrar que, se  $|\beta| < 10^{85}$ , a constante  $\Omega$  pode ser negligenciada para todos os efeitos práticos, uma vez que tem um valor extremamente pequeno que não contribuirá para qualquer cálculo dentro da precisão experimental atual [16]. Na próxima seção mostraremos que  $|\beta| < 10^{61}$ . Como consequência, vamos omitir a constante acima referida, a partir de agora, em todos os cálculos subsequentes.

## 4.4 Um limite superior para $|\beta|$

Omitindo a constante de integração de (4.17), podemos calcular a partir da equação resultante  $\theta_{\text{red}}$  e  $\theta_{\text{violet}}$  para diferentes valores de  $|\beta|$ . Os resultados são mostrados na Fig. 2.

Um rápido olhar dirigido à Fig. 2 mostra que o comportamento de  $\theta_{\text{red}}$  e  $\theta_{\text{violet}}$  é, em um

certo sentido, realmente bizarro. Na verdade, para  $61 < \log_{10} |\beta| < 71$ ,  $\theta_{\text{red}}$  desvia-se mais que  $\theta_{\text{violet}}$  e, além disso, ambos os ângulos aproximam-se de zero (deflexão gravitacional nula) a partir de  $\log_{10} |\beta| > 71$ . No entanto, esta forma peculiar e estranha dos ângulos se comportarem é completamente correta. Na verdade, uma exame superficial da Eq. (4.9) permite concluir que no âmbito desta gravidade a força resultante sobre o fóton é a soma de uma força que vem da teoria de Einstein, que por sinal, é atrativa e constante, mais uma força devida ao sector  $R_{\mu\nu}^2$  da teoria que é repulsivo e depende de  $|\beta|$ . Na verdade, o fóton é atraído pelo setor de Einstein e, simultaneamente, repellido pelo sector  $R_{\mu\nu}^2$ . Se a contribuição do setor de Einstein predomina, ambos os ângulos de deflexão são iguais a  $\theta_E$ , como de costume. Por outro lado, a medida que a contribuição devida ao sector  $R_{\mu\nu}^2$  aumenta, o fóton é mais repellido pelo Sol do que atraído por ele; como consequência, o fóton se move para fora a partir do Sol e finalmente aproxima-se da direção do fóton incidente (ver Fig. 3). Na verdade, o fóton vermelho possui uma deflexão que é menor do que a deflexão do fóton violeta se tomarmos como referência os fótons espalhados pelo setor de Einstein  $\mathbf{p}'_E$ . Com efeito, uma vez que o fóton violeta tem maior energia do que o vermelho, ele será repellido mais do que o vermelho. Assim, chegamos à conclusão de que  $\theta_{\text{red}} > \theta_{\text{violet}}$ .

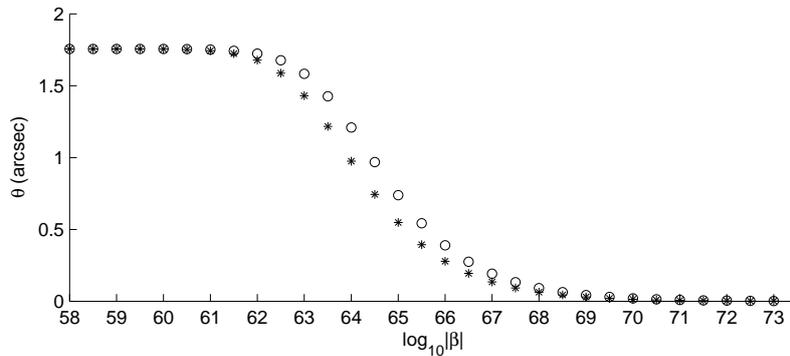


Figura 4.2:  $\theta_{\text{red}}$  (círculo) e  $\theta_{\text{violet}}$  (asterístico) para raios de luz passando pelo Sol como função de  $\log_{10} |\beta|$  na gravidade com derivadas de ordem mais alta.

Por conseguinte, no âmbito da gravidade em questão o espectro visível, cujo comprimento de onda varia de 4000 à 7000 (Å), se espalharia em um ângulo  $|\Delta\theta| \equiv |\theta_{\text{violet}} - \theta_{\text{red}}|$ . Vamos, então, avaliar  $|\Delta\theta|$  para diferentes valores de  $|\beta|$  usando a Eq. (4.17) com  $\Omega = 0$ . Os resultados são mostrados na Fig. (4). Uma inspeção rápida deste gráfico permite concluir que, para

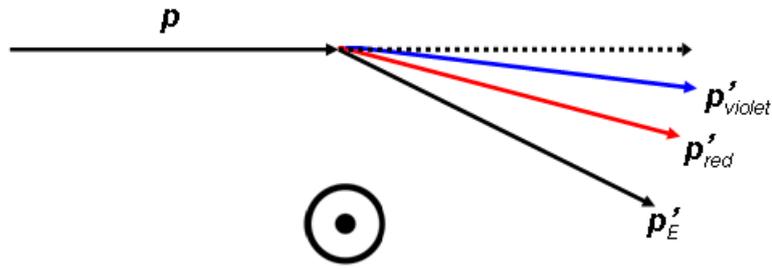


Figura 4.3: Ângulo de deflexão, respectivamente, para o foton de Einstein, vermelho e violeta, passando próximos ao Sol no contexto da gravidade com derivadas de ordem mais alta.

$61 < \log_{10} |\beta| < 71$  o espalhamento do espectro visível seria, a princípio, observável. Na verdade, devemos esperar um valor pequeno para  $|\Delta\theta|$  na borda do Sol a fim de não entrar em conflito com resultados bem estabelecidos da relatividade geral experimental. Por conseguinte, se  $|\beta| < 10^{61}$ , o espalhamento do espectro visível seria praticamente imperceptível e o ângulo de desvio seria muito próximo ao de Einstein. Assim, chegamos à conclusão de que, a fim de concordar com os valores medidos para a luz visível,  $|\beta| < 10^{61}$ . Ressaltamos que este limite foi estimado exigindo-se que o espectro visível fosse praticamente invisível. Claro que o limite mencionado seria modificado se tivéssemos feito uso de fótons com comprimentos de onda fora do intervalo de 4000 à 7000 (Å).

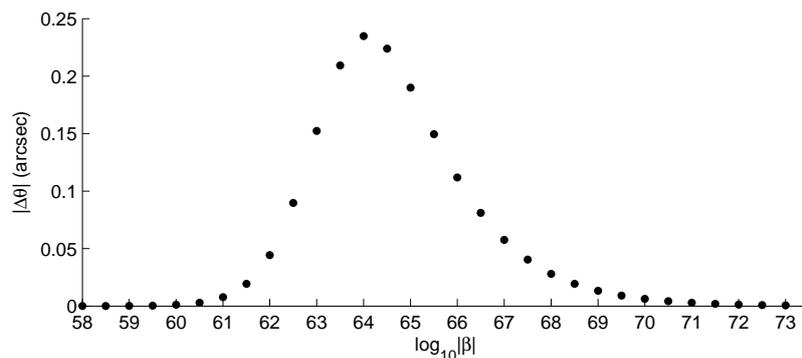


Figura 4.4:  $|\Delta\theta|$  como função de  $\log_{10} |\beta|$  para raios de luz passando pelo Sol no contexto da gravidade com derivadas de ordem mais alta.

## 4.5 Considerações finais

Mostramos que a gravidade com derivadas de ordem mais alta produz uma propagação dispersiva de fótons. Curiosamente, no processo de espalhamento o fóton está sob a influência simultânea de uma força gravitacional atrativa e outra repulsiva que funcionam como uma espécie de cabo-de-guerra. Analisando a contribuição dependente da energia para os fótons que passam pelo Sol, foi possível encontrar um limite superior para a constante  $|\beta|$ . Vamos, então, comparar este limite superior com aqueles disponíveis na literatura. Usando as medidas de Long [17], Stelle [10] encontrou que  $m_2 \approx 1 \times 10^{-4} \text{cm}^{-1}$ . Utilizando este valor Donoghue [17] estimou que  $|\beta| \leq 10^{74}$ . Dessa forma, nosso limite reduziu o limite aceito para  $|\beta|$  por treze ordens de magnitude.

Para concluir, mostraremos porque o setor  $R^2$  da gravidade em questão não contribui para o processo de dispersão. Para fazer isso, calculamos a amplitude de Feynman relacionada ao setor  $R^2$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{rr'}^{(R^2)} = & \frac{1}{2} \kappa h_{\text{ext}}^{(R^2)\lambda\rho}(\mathbf{k}) \left[ -\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} p p' + \eta_{\lambda\rho} p'_\mu p_\nu + 2 \left( \eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu \right. \right. \\ & \left. \left. - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} p p' \right) \right] \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $h_{\text{ext}}^{(R^2)\lambda\rho}(\mathbf{k})$  é dado pela Eq. (4.13). Uma rápida consulta à (4.13) é suficiente para nos convencer de que  $\mathcal{M}_{rr'}$  é igual a zero. Outra maneira de ver isso é observando que a métrica relativa a gravidade  $R + R^2$  linearizada — a teoria obtida por linearização das equações de campo relacionadas a ação  $\int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 - \mathcal{L}_M \right]$  — é conformalmente relacionada com a relatividade geral linearizada. Na verdade, se  $\beta = 0$ , obtemos a partir de (4.8) que  $\psi_{\mu\nu} = 0$ . Como conseqüência, a Eq. (4.6) se reduz a  $h_{\mu\nu}^{(R+R^2)} = h_{\mu\nu}^{(E)} - \phi \eta_{\mu\nu}$ , onde  $h_{\mu\nu}^{(R+R^2)}$  denota a solução

da gravidade linearizada  $R + R^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{(R+R^2)} &\equiv \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}^{(R+R^2)} \\ &= (1 - \kappa\phi) \left( \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}^{(E)} \right) \\ &= (1 - \kappa\phi) g_{\mu\nu}^{(E)}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde, é claro, termos da ordem de  $\kappa^2$  foram desprezados.

# Referências Bibliográficas

- [1] K. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [2] I. Buchbinder, S. Odintsov, and I. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP, Bristol, 1992).
- [3] G. de Berredo-Peixoto and I. Shapiro, Phys. Rev. D **70**, 044024 (2004).
- [4] G. de Berredo-Peixoto and I. Shapiro, Phys. Rev. D **71**, 064005 (2005).
- [5] See, for instance, T. Soritiou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
- [6] M. Veltman, in *Methods in Field Theory*, eds. R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland/World Scientific, 1981).
- [7] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone and W. Herdy, Class. Quantum Grav. **32**, 035021 (2015).
- [8] A. Accioly, A. Azeredo and H. Mukai, J. Math. Phys. **43**, 473 (2002).
- [9] P. Teyssandier, Class. Quantum Grav. **6**, 219 (1989).
- [10] K. Stelle, Gen. Relativ. Gravit. **9**, 353 (1978).
- [11] J. Donoghue, Phys. Rev. Lett. **72**, 2996 (1994).
- [12] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai and E. de Rey Neto, Prog. Theor. Phys. **104**, 103 (2000).
- [13] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, F. A. Barone and P. Gaete, Phys. Rev. D **90**, 105029 (2014).

- [14] R. Delbourgo and P. Phocas-Cosmetatos, *Phys. Lett. B* **41**, 533 (1972).
- [15] F. Berends and R. Gastmans, *Ann. Phys. (N.Y.)* **98**, 225 (1976).
- [16] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Giacchini and W. Herdy, *Phys. Rev. D* **91**, 125009 (2015).
- [17] D. Long, *Nature* **260**, 417 (1976).

# Capítulo 5

## A descrição do efeito Casimir através de potenciais eletromagnéticos

### 5.1 Introdução

O cenário vazio subjacente a todos os processos que se desdobram na física clássica, adquiriu uma rica estrutura em teoria quântica de campos. O vácuo é agora apenas um dentre os possíveis estados acessíveis às entidades elementares desta teoria; os campos. Algumas das manifestações físicas deste estado são descritas pelo *Efeito Casimir* [1, 2, 3, 4], que revelou fenômenos físicos tão interessantes como a adesão e o atrito [5] em dispositivos nanoestruturados, bem como a criação de partículas pelo chamado efeito Casimir dinâmico [6], para mencionar apenas alguns. Em todos os casos, as propriedades físicas dos materiais envolvidos tem uma influência importante sobre os efeitos observados. Do ponto de vista teórico, temos à nossa disposição um conjunto de métodos para lidar com processos onde devem ser levadas em conta as propriedades realistas dos materiais. Além da teoria de Lifshitz [3, 4], que inclui a resposta dielétrica macroscópica dos objetos, outro exemplo notável é o acoplamento de potenciais tipo  $\delta$  em campos quânticos, que têm sido amplamente utilizado para descrever superfícies semitransparentes em interação com os campos escalares e fermiônicos [3, 7, 8, 9, 10, 11].

Este tipo de descrição para condições de contorno suaves e o correspondente propagador do

fóton, que decorrem diretamente de um potencial efetivo, permaneceu elusivo até agora para o campo eletromagnético, principalmente por causa de sua invariância de calibre. O modelo apresentado abaixo supera este desafio e recupera o bem conhecido propagador do fóton obtido por Bordag, Robaschik e Wieczorek [12], no caso limite de condutores perfeitos.

Neste capítulo lidamos com o campo vetorial  $A_\mu$  em  $(1+3)$  dimensões, em um espaço-tempo com métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ . Na seção II definimos um novo modelo com a Lagrangiana de Maxwell acrescida de um potencial que descreve uma superfície dielétrica uniaxial tipo- $\delta$ , e encontramos a correção ao propagador do fóton livre devido à presença deste termo. A interação entre esta superfície e uma carga pontual é investigada na seção III. Na seção IV generalizamos o modelo para duas superfícies, e encontramos o propagador correspondente. A energia de Casimir para as duas superfícies é calculada na seção V, e a seção VI é dedicada às nossas considerações finais.

## 5.2 A modificação do propagador do fóton devido a presença de uma placa

Para modelar o campo eletromagnético na presença de uma superfície tipo- $\delta$  começamos impondo, de maneira *ad hoc*, um termo adicional na Lagrangiana de Maxwell, com a habitual fixação de calibre covariante. A partir de agora, e sem perda de generalidade, vamos considerar uma placa semitransparente perpendicular ao eixo  $x^3 = z$  e localizada na posição  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ ; portanto, o vetor normal à superfície é  $S^\gamma = \eta^\gamma_3$ , e o modelo assume a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2} S^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)^2 \delta(x^3 - a). \quad (5.1)$$

Note que, tal como está na Lagrangiana, é o tensor dual do tensor intensidade de campo,  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ , que é contraído com o vetor normal à superfície.

A constante  $m \geq 0$ , tem dimensão de massa em unidades naturais e é introduzida como uma medida do grau de transparência do espelho. Que ela é uma função das propriedades electro-

magnéticas do material, pode ser claramente visto a partir da sua relação com a permissividade elétrica,  $\epsilon^{ij}$ , e permeabilidade magnética inversa,  $(\mu^{-1})^{ij}$ , do modelo (5.1),

$$\begin{aligned}\epsilon^{ij} &= \delta^{ij} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)(\delta^{i1}\delta^{j1} + \delta^{i2}\delta^{j2}) , \\ (\mu^{-1})^{ij} &= \delta^{ij} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)(\delta^{i3}\delta^{j3}) .\end{aligned}\tag{5.2}$$

Por conseguinte, as suscetibilidades principais  $\chi^{ii}$ , que podem ser lidas na primeira equação (5.2), mostram que a Lagrangiana (5.1) descreve uma superfície dielétrica uniaxial. Estes são os mesmos tipos de propriedades electromagnéticas utilizados em [13] para analisar placas semitransparente tipo- $\delta$  em uma outra abordagem.

Vale ressaltar que, como o tensor de Levi-Civita é totalmente anti-simétrico, as derivadas no último termo em (5.1) são tomadas apenas no espaço paralelo à superfície, isto é;

$$\left(\frac{1}{2}\eta_{3\mu}^{\nu}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)^2 = \epsilon_{3\alpha\beta\nu}\epsilon_{3\rho\tau}{}^{\nu}(\partial_{\parallel}^{\alpha}A^{\beta})(\partial_{\parallel}^{\rho}A^{\tau}) ,\tag{5.3}$$

onde deffinimos o operador diferencial  $\partial_{\parallel}^{\alpha} = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, 0)$ .

O modelo exhibe uma descontinuidade tipo- $\delta$  no espelho, e a influência dessa descontinuidade nos campos pode ser facilmente entendida a partir da equações de movimento,

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathcal{V}_{\nu} = J_{\nu} ,\tag{5.4}$$

onde,

$$\mathcal{V}_{\nu} = \partial^{\alpha}F_{\alpha\nu} + \partial_3F_{3\nu} + \eta_{3\nu}^{\alpha}\partial^{\alpha}F_{\alpha 3} .\tag{5.5}$$

É este vetor que dita o comportamento dos campos exatamente na fronteira  $x^3 = a$ . Este assunto pode ser esclarecido escrevendo a equação (5.4) para  $\nu = 0, 1, 2, 3$ , o que leva à

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{E} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{E}_{\parallel} \right] = J_0 ,$$

$$\nabla \times \left[ \mathbf{B} + \frac{2}{m} \delta(x^3 - a) \mathbf{B}_\perp \right] = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{E} + \frac{2}{m} \delta(x^3 - a) \mathbf{E}_\parallel \right] \quad (5.6)$$

onde definimos os vetores perpendicular e paralelo à placa, ou seja,  $\mathbf{E}_\parallel = (E^1, E^2, 0)$ ,  $\mathbf{B}_\perp = (0, 0, B^3)$ .

Usando as equações (5.2), obtemos

$$\begin{aligned} D^i &= \sum_j \epsilon^{ij} E^j \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{2}{m} \delta(x^3 - a) \mathbf{E}_\parallel, \\ H^i &= \sum_j (\mu^{-1})^{ij} B^j \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{B} + \frac{2}{m} \delta(x^3 - a) \mathbf{B}_\perp, \end{aligned} \quad (5.7)$$

de modo que as equações (5.6) podem ser reescritas na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = J^0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.8)$$

Uma vez que os vetores de polarização e de magnetização são definidos por  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$  and  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$ , respectivamente, a partir de (5.8), vemos que

$$\mathbf{P} = \frac{2}{m} \delta(x^3 - a) \mathbf{E}_\parallel, \quad \mathbf{M} = -\frac{2}{m} \delta(x^3 - a) \mathbf{B}_\perp, \quad (5.9)$$

mostrando que as descontinuidades tipo- $\delta$  estão inteiramente contidas nos vetores de polarização e magnetização, definidos apenas sobre a placa.

Apesar da descontinuidade tipo- $\delta$  o propagador é bem definido em todo o espaço, como veremos. Isto está intimamente relacionado com a ausência de qualquer tipo de condição de limite *ad hoc*, no sentido de que não requeremos qualquer restrição sobre os campos de calibre para descrever a superfície do material. O novo termo em (5.1) é suficiente para definir as condições necessárias em  $x^3 = a$ . A mesma abordagem foi utilizada em [14] onde os autores partem de uma ação que inclui um termo de interação acoplando o campo de calibre ao espelho sem recorrer a condições de contorno *ad-hoc*, embora não tenham encontrado o propagador do fóton.

Definindo o calibre de Feynman ( $\xi = 1$ ) em (5.1), e escrevendo a Lagrangiana na forma quadrática, podemos encontrar o operador que estamos interessados,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu \\ &= \frac{1}{2}A_\mu \left[ \eta^{\mu\nu} \square + \frac{2}{m} \delta(x^3 - a)(\eta^{\mu\nu} \square_{\parallel} - \partial_{\parallel}^{\mu} \partial_{\parallel}^{\nu}) \right] A_\nu ,\end{aligned}\tag{5.10}$$

onde  $\square_{\parallel} = \partial_{\parallel}^{\alpha} \partial_{\parallel\alpha}$ .

Por uma questão de simplicidade nos cálculos que se seguem, vamos dividir o operador diferencial acima em duas partes:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \mathcal{O}^{(0)\mu\nu} + \Delta \mathcal{O}^{\mu\nu} ,\tag{5.11}$$

onde,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{(0)\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} \square , \\ \Delta \mathcal{O}^{\mu\nu} &= \frac{2}{m} \delta(x^3 - a)(\eta^{\mu\nu} \square_{\parallel} - \partial_{\parallel}^{\mu} \partial_{\parallel}^{\nu}) .\end{aligned}\tag{5.12}$$

Também vamos escrever  $G^{(0)\mu\nu}$  para o propagador do fóton livre que, no espaço de coordenadas, é definido pela relação  $\mathcal{O}^{(0)\mu\nu}(x)G_{\nu\lambda}^{(0)}(x, y) = \eta_{\lambda}^{\mu} \delta^{(4)}(x - y)$ .

Tal como no caso do campo escalar [15], o propagador do fóton  $G^{\mu\nu}(x, y)$ , modificado devido à presença do espelho, ou o operador que inverte (5.11), pode ser escrito de maneira recursiva na forma integral como,

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu}(x, y) &= G_{\mu\nu}^{(0)}(x, y) \\ &- \int d^4z G_{\mu\gamma}(x, y) \Delta \mathcal{O}^{\gamma\sigma}(z) G_{\sigma\nu}^{(0)}(z, y) .\end{aligned}\tag{5.13}$$

O que é facilmente verificado aplicando-se o operador (5.11) na expressão (5.13).

Por conveniência, vamos tomar a transformada de Fourier das funções de Green nas coordenadas paralelas ao espelho, a fim de obter as funções de Green reduzidas a partir de,

$$G_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel}) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} . \quad (5.14)$$

Com a equação acima, o propagador reduzido do fóton livre é facilmente encontrado como,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_{\parallel}) &= -\eta_{\mu\nu} \int \frac{dp^3}{2\pi} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p_{\parallel}^2 - (p^3)^2} \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} , \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde definimos  $\sigma = \sqrt{-p_{\parallel}^2}$ .

Substituindo a última definição de (5.12) em (5.13), transformando o resultado de acordo com (5.14) e usando (5.15), após algumas integrações encontramos a propagador modificado do fóton que estamos buscando,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel}) = \eta_{\mu\nu} \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} + \frac{2}{m} \mathcal{G}_{\mu\gamma}(x^3, a; p_{\parallel}) p_{\parallel}^2 \left( \eta_{\parallel}^{\gamma}{}_{\nu} - \frac{p_{\parallel}^{\gamma} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \frac{e^{-\sigma|a^3-y^3|}}{2\sigma} , \quad (5.16)$$

onde definimos  $\eta_{\parallel}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \eta^{\mu 3} \eta^{\nu 3}$  and  $p_{\parallel}^{\gamma} = (p^0, p^1, p^2, 0)$ .

Neste ponto o cálculo torna-se sutil porque o propagador acima ainda é definido de forma recursiva. É possível contornar esta dificuldade explorando o fato de que ele exhibe explicitamente a sua dependência em relação à posição das placas, de modo que podemos escrever o propagador de um ponto arbitrário até a posição da superfície  $y^3 = a$ , e isolar os termos que o contêm, o que nos permite escrever

$$\mathcal{G}_{\mu\gamma}(x^3, a; p_{\parallel}) \left[ \eta_{\parallel}^{\gamma}{}_{\nu} - \frac{1}{m\sigma} p_{\parallel}^2 \left( \eta_{\parallel}^{\gamma}{}_{\nu} - \frac{p_{\parallel}^{\gamma} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \right] = \eta_{\mu\nu} \frac{e^{-\sigma|x^3-a|}}{2\sigma} . \quad (5.17)$$

Multiplicando ambos os lados pelo operador que inverte o termo entre colchetes, obtemos

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, a; p_{\parallel}) = \frac{e^{-\sigma|x^3-a|}}{2\sigma} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{m} \frac{\sigma}{(1 + \frac{\sigma}{m})} \left( \eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \right]. \quad (5.18)$$

Substituindo (5.18) em (5.15) e usando (5.14), o propagador modificado do fóton, devido a presença dos espelhos, assume a forma

$$G_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \left[ \eta_{\mu\nu} \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\sigma(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{m + \sigma} \left( \eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \right] \times e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (5.19)$$

Salientamos que este propagador é contínuo e bem definido em todo o espaço, como pode ser facilmente visto. Como uma verificação importante note que, ao colocar uma das placas no infinito no propagador que descreve o efeito Casimir para condutores perfeitos, obtido em [12], obtemos o propagador (5.19) com  $m = 0$  (após a transformação  $\Gamma = i\sigma$  apenas para fazer a notação equivalente). Esta validação fundamental mostra que ambos os propagadores são o mesmo no limite adequado de um único condutor perfeito.

O primeiro termo do lado direito da expressão acima é apenas o propagador usual do fóton. A correcção vem do segundo termo, mas uma vez que ele não depende apenas da distância entre dois pontos, mas também da posição do espelho, esta anisotropia nos impede de transformar o propagador para o espaço dos momenta, como de costume. Para superar esta dificuldade e verificar se este novo propagador goza das propriedades desejadas, podemos recorrer a fontes externas clássicas para descrever cargas pontuais [16] ao invés do método de espalhamento, assim como foi feito no primeiro capítulo.

### 5.3 O método das imagens

Nesta secção, mostramos como o propagador acima leva à interacção correcta entre uma carga estática e um espelho plano [17], explorando a expressão para a energia total do sistema em

termos do funcional gerador das funções de Green conexas, isto é,

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int d^4x \int d^4y J^\mu(x) G_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) . \quad (5.20)$$

A presença de uma carga pontual é descrita por uma fonte externa [16]

$$J^\mu(x) = q\eta^{\mu 0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{b}) . \quad (5.21)$$

onde  $\mathbf{b}$  é um vetor constante descrevendo a posição da carga que será tomada como  $\mathbf{b} = (0, 0, b)$ , por uma questão de simplicidade.

Substituindo a corrente (5.21) em (5.20) e integrando a função delta, obtemos

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{q^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int \frac{d^2\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^2} \mathcal{G}_{00}(b, b; p^0 = 0, \mathbf{p}_\parallel) . \quad (5.22)$$

Observando que o primeiro termo do lado direito da Eq.(5.19) é apenas o propagador livre e, portanto, não contribui para a energia de interação entre o eespelho e a carga (este termo não depende a distância entre o espelho e a carga, ele está presente mesmo na ausência do espelho e descreve a auto-energia da carga), podemos usar a parte restante do propagador para escrever a Eq.(5.22) como,

$$E_{int} = -\frac{q^2}{4} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2\sigma|b-a|}}{m + \sigma} . \quad (5.23)$$

A expressão acima é a forma de energia de interação entre uma carga estática  $q$ , localizado em  $\mathbf{b} = (0, 0, b)$ , e o espelho. Definindo  $R = |b - a|$ , mudando para coordenadas polares e usando o operador diferencial, obtemos

$$\begin{aligned} E_{int}(R, m) &= -\frac{q^2}{4} \int \frac{dr d\theta}{(2\pi)^2} \frac{r e^{-2rR}}{m + r} \\ &= \frac{q^2}{16\pi} \frac{\partial}{\partial R} \int_0^\infty dr \frac{e^{-2rR}}{m + r} . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Esta expressão pode ser escrita em uma forma conveniente efetuando a mudança de variável

$s = r + m$ , a fim de que

$$E_{int} = \frac{q^2}{16\pi} \frac{\partial}{\partial R} \left( e^{2mR} \int_m^\infty ds \frac{e^{-2sR}}{s} \right). \quad (5.25)$$

A integral acima é a conhecida função integral exponencial  $Ei(u, v)$  [18]. Sendo assim, podemos escrever a energia como,

$$\begin{aligned} E_{int}(R, m) &= \frac{q^2}{16\pi} \frac{\partial}{\partial R} [e^{2mR} Ei(1, 2mR)] \\ &= -\frac{q^2}{16\pi R} [1 - 2mR e^{2mR} Ei(1, 2mR)]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

A Eq.(5.26) é o resultado exato para a energia de interação de uma carga pontual e uma superfície parcialmente refletiva, descrita pelo modelo (5.1). O segundo termo na segunda linha representa a correção devido à refletividade parcial. Este termo desaparece no limite  $m \rightarrow 0$ , o que corresponde ao campo submetido as condições limites impostas por uma placa perfeitamente condutora. Neste caso, a energia (5.26) fica

$$\lim_{m \rightarrow 0} E_{int}(R, m) = -\frac{q^2}{16\pi R}. \quad (5.27)$$

Portanto, a Lagrangiana (5.1) descreve exatamente a interação obtida pelo método das imagens no limite de um espelho perfeito. No caso oposto, quando  $m \rightarrow \infty$ , a energia (5.26) vai a zero conforme o esperado. Além disso, para uma distância fixa  $R$ , ela diminui quanto  $m$  aumenta.

O comportamento da energia como uma função da distância  $R$  pode ser visto na Fig.(5.1), onde se mostra um gráfico da Eq.(5.26) para dois valores diferentes de  $m$ .

A força entre o espelho e a carga é;

$$F = -\frac{\partial}{\partial R} E_{int}(R, m)$$

$$= -\frac{q^2}{16\pi R} \left[ 1 - 2mR + (2mR)^2 e^{2mR} Ei(1, 2mR) \right]. \quad (5.28)$$

Observe que esta expressão é monotônica em  $R$  e  $m$ , e é sempre negativa, o que denota uma força atrativa.

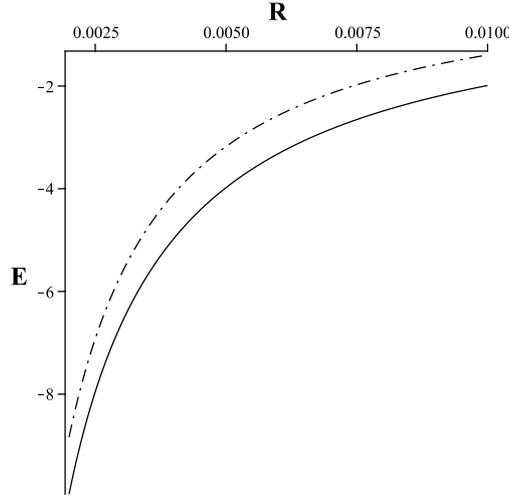


Figura 5.1: Energia de interação como função da distância, Eq.(5.26), para  $q = 1$ ,  $m = 10$  (linha pontilhada) e  $m = 0$  (linha sólida).

## 5.4 A modificação do propagador do fóton entre duas placas

Fazendo uma generalização trivial para duas superfícies paralelas localizados nas posições  $\mathbf{a}_i = (0, 0, a_i)$ ,  $i = 1, 2$ , e perpendiculares ao eixo  $x^3$ , o modelo assume a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial A)^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{4} \left( \frac{1}{2} S^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)^2 \delta(x^3 - a_i), \quad (5.29)$$

onde o vetor normal à superfície é  $S^\mu = \eta^\mu_3$ , apenas por causa da configuração adoptada para as placas. Obviamente, isso não implica em qualquer perda de generalidade. Aqui também

definimos  $\frac{1}{m} = \frac{\mu}{4}$ , por conveniência nos cálculos a seguir.

Neste caso temos que,

$$\begin{aligned}\epsilon^{ij} &= \delta^{ij} + \sum_{k=1}^2 \frac{\mu_k}{2} \delta(x^3 - a_k) (\delta^{i1} \delta^{j1} + \delta^{i2} \delta^{j2}) , \\ (\mu^{-1})^{ij} &= \delta^{ij} + \sum_{k=1}^2 \frac{\mu_k}{2} \delta(x^3 - a_k) (\delta^{i3} \delta^{j3}) .\end{aligned}\tag{5.30}$$

E procedendo de forma inteiramente análoga ao caso anterior de uma única placa, obtemos o propagador reduzido com um termo a mais

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel}) = \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_{\parallel}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{2} \mathcal{G}_{\mu\gamma}(x^3, a_i; p_{\parallel}) p_{\parallel}^2 \left( \eta_{\parallel}^{\gamma\sigma} - \frac{p_{\parallel}^{\gamma} p_{\parallel}^{\sigma}}{p_{\parallel}^2} \right) \mathcal{G}_{\sigma\nu}^{(0)}(a_i, y^3; p_{\parallel}).\tag{5.31}$$

Na Eq.(5.31), escrevendo o propagador de um ponto arbitrário até a posição da superfície como no caso anterior, tomando  $y^3 = a_j$ , nos permite escrever a equação matricial,

$$\sum_{i=1}^2 \mathcal{G}_{\nu\sigma}(x^3, a_i; p_{\parallel}) (\mathcal{M}_{(ij)})^{\sigma}_{\lambda} = \mathcal{G}_{\nu\lambda}^{(0)}(x^3, a_j; p_{\parallel}) ,\tag{5.32}$$

onde,

$$(\mathcal{M}_{(ij)})^{\sigma}_{\lambda} = \eta^{\sigma}_{\lambda} \delta_{ij} - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{2} p_{\parallel}^2 \left( \eta_{\parallel}^{\gamma\sigma} - \frac{p_{\parallel}^{\gamma} p_{\parallel}^{\sigma}}{p_{\parallel}^2} \right) \mathcal{G}_{\gamma\lambda}^{(0)}(a_i, a_j; p_{\parallel}) .\tag{5.33}$$

Como o lado direito da Eq.(5.32) é apenas o propagador livre, podemos descobrir o propagador corrigido multiplicando ambos os lados desta equação pelo inverso da matriz  $(\mathcal{M}_{(ij)})^{\sigma}_{\lambda}$  que pode ser encontrada a partir da relação,

$$\sum_{j=1}^2 (\mathcal{M}_{(ij)})^{\sigma}_{\lambda} (\mathcal{M}_{(jk)}^{-1})^{\lambda}_{\tau} = \delta_{ik} \eta^{\sigma}_{\tau} .\tag{5.34}$$

Esta matriz pode ser escrita apropriadamente para nossos propósitos como,

$$(\mathcal{M}_{(jk)}^{-1})^\lambda{}_\tau = \eta^\lambda{}_\tau \delta_{jk} + \frac{\mathcal{B}_{jk}}{W(p_\parallel)} \left( \eta_\parallel^\lambda{}_\tau - \frac{p_\parallel^\lambda p_\parallel{}_\tau}{p_\parallel^2} \right), \quad (5.35)$$

onde os elementos da matriz  $\mathcal{B}$ , que é uma matriz  $2 \times 2$ , são

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ii} &= \frac{\mu_i p_\parallel^2}{4\sigma} - \frac{\mu_1 \mu_2}{4} \frac{p_\parallel^4}{4\sigma^2} (1 - e^{-2\sigma a}), \\ \mathcal{B}_{ij} &= \frac{\mu_i p_\parallel^2}{4\sigma} e^{-\sigma a}, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5.36)$$

e onde fizemos as seguintes definições, por conveniência notacional:  $a = |a_1 - a_2|$  e

$$W(p_\parallel) = \left( 1 - \frac{\mu_1 p_\parallel^2}{4\sigma} \right) \left( 1 - \frac{\mu_2 p_\parallel^2}{4\sigma} \right) - \mu_1 \mu_2 \frac{p_\parallel^4}{16\sigma^2} \exp(-2\sigma a). \quad (5.37)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (5.32) por  $(\mathcal{M}_{(jk)}^{-1})^\lambda{}_\tau$  e redefinindo os índices, depois de algumas manipulações algébricas, obtemos a função de Green reduzida aparece no lado direito da Eq.(5.31) em função do propagador do fóton livre,

$$\mathcal{G}_{\mu\gamma}(x^3, a_i; p_\parallel) = \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}_{\mu\tau}^{(0)}(x^3, a_j; p_\parallel) (\mathcal{M}_{(ji)}^{-1})^\tau{}_\gamma. \quad (5.38)$$

Substituindo a expressão (5.38) em (5.31), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_\parallel) &= \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_\parallel) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_i}{2} \mathcal{G}_{\mu\tau}^{(0)}(x^3, a_j; p_\parallel) (\mathcal{M}_{(ji)}^{-1})^\tau{}_\gamma p_\parallel^2 \left( \eta_\parallel^{\gamma\sigma} - \frac{p_\parallel^\gamma p_\parallel^\sigma}{p_\parallel^2} \right) \mathcal{G}_{\sigma\nu}^{(0)}(a_i, y^3; p_\parallel) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Transformando (5.39) de acordo com (5.14) obtemos a forma final do propagador do fóton, corrigido devido a presença das placas

$$G_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^3 p_\parallel}{(2\pi)^3} \left[ \eta_{\mu\nu} \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\mu_i}{2} \frac{e^{-\sigma(|x^3-a_i|+|y^3-a_j|)}}{4\sigma^2} \frac{\mathcal{T}_{ij}}{W(p_\parallel)} p_\parallel^2 \right]$$

$$\times \left( \eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu}p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \Big] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}, \quad (5.40)$$

onde

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu_2 p_{\parallel}^2}{4\sigma} & \frac{\mu_1 p_{\parallel}^2}{4\sigma} e^{-\sigma a} \\ \frac{\mu_2 p_{\parallel}^2}{4\sigma} e^{-\sigma a} & 1 - \frac{\mu_1 p_{\parallel}^2}{4\sigma} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

O propagador (5.40) é contínuo e bem definido em todo o espaço, como pode ser facilmente visto. O primeiro termo do seu lado direito é apenas o propagador usual do fóton,  $G_{\mu\nu}^{(0)}(x, y)$ . A correção vem inteiramente do segundo termo, que vamos escrever como  $\Delta G_{\mu\nu}(x, y)$  de agora em diante, isto é

$$\Delta G_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\mu_i e^{-\sigma(|x^3-a_i|+|y^3-a_j|)}}{4\sigma^2} \frac{\mathcal{T}_{ij}}{W(p_{\parallel})} p_{\parallel}^2 \left( \eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu}p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (5.42)$$

É importante ressaltar o fato de que, tomando o caso limite no qual  $\mu_1 = \mu_2 \rightarrow \infty$ , o propagador (5.40) torna-se o mesmo que o obtido por Bordag , Robaschik e Wieczorek em [12], para condutores perfeitos. Isso também esclarece a forma como os parâmetros  $\mu_i$  medem o grau de transparência dos espelhos, ou seja, chegamos ao limite de condutores perfeitos quando  $\mu_i \rightarrow \infty$ . Por outro lado, tomando  $\mu_1 = 0$  (ou  $\mu_2 = 0$ ) obtemos o mesmo propagador na presença de uma única superfície obtido anteriormente. Estas são, obviamente, as conclusões mais importantes para a validação do modelo.

## 5.5 A energia de Casimir

A densidade de Hamiltoniana correspondente à Lagrangiana (5.29) é:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \left[ (\partial_0 A_{\mu})(\partial_0 A^{\mu}) + \sum_{j=1}^3 (\partial_j A^{\mu})(\partial_j A_{\mu}) \right] - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{4} \delta(x^3 - a_i) (\partial^{\rho} A_{\nu})$$

$$\times \left[ \mathcal{P}^{\mu\nu}{}_{0\rho}(\partial_0 A_\mu) + \sum_{j=1}^3 \mathcal{P}^{\mu\nu}{}_{j\rho}(\partial_j A_\mu) \right], \quad (5.43)$$

onde definimos  $\mathcal{P}_{\alpha\beta\rho\tau} = \epsilon_{3\alpha\beta\nu} \epsilon_{3\rho\tau}{}^\nu$ , por conveniência. A energia é encontrado através da integração da expressão acima ao longo de todo espaço. Para tornar essa integração viável, vamos empregar a regularização por separação de pontos, a fim de obter

$$\begin{aligned} E(\mu_1, \mu_2) &= \int d^3\mathbf{x} \lim_{x' \rightarrow x} -\frac{1}{2} \left[ \mathcal{O}^{\mu\nu} - \left( \eta^{\mu\nu} \partial_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{2} \delta(x^3 - a_i) \mathcal{P}^{\mu\nu}{}_{0\rho} \partial^\rho \right) (\partial_0 - \partial'_0) \right] iG_{\mu\nu}(x', x) \\ &= -\frac{i}{2} \eta^\mu{}_\mu \int d^3\mathbf{x} \delta^{(4)}(0) + \int d^3\mathbf{x} \lim_{x' \rightarrow x} \frac{i}{2} \left( \eta^{\mu\nu} \partial_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{2} \delta(x^3 - a_i) \mathcal{P}^{\mu\nu}{}_{0\rho} \partial^\rho \right) \\ &\quad \times (\partial_0 - \partial'_0) G_{\mu\nu}(x', x). \end{aligned} \quad (5.44)$$

A Eq.(5.44) é a energia total do sistema descrito pelo modelo (5.29). Como estamos interessados apenas na energia de interação entre as duas placas, devemos subtrair dessa energia total (5.44) a energia no vácuo do campo livre,  $E_0$ ; ou seja, a energia no vácuo do campo eletromagnético sem as placas. Esta pode ser facilmente calculada removendo-se as duas placas, basta tomar  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  na Eq.(5.44); isto é

$$E_0 = E(\mu_1 = 0, \mu_2 = 0) = -\frac{i}{2} \eta^\mu{}_\mu \int d^3\mathbf{x} \delta^{(4)}(0) + \int d^3\mathbf{x} \lim_{x' \rightarrow x} \frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_0 (\partial_0 - \partial'_0) G_{\mu\nu}^{(0)}(x', x) \quad (5.45)$$

De modo que a energia restante fica

$$\begin{aligned} E(\mu_1, \mu_2) - E_0 &= \frac{i}{2} \int d^3\mathbf{x} \lim_{x' \rightarrow x} \eta^{\mu\nu} \partial_0 (\partial_0 - \partial'_0) \\ \Delta G_{\mu\nu}(x', x) &+ \frac{i}{2} \int d^3\mathbf{x} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{2} \delta(x^3 - a_i) \mathcal{P}^{\mu\nu}{}_{0\rho} \partial^\rho (\partial_0 - \partial'_0) G_{\mu\nu}(x', x). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Da mesma forma, precisamos remover as auto-energias  $E_1$  e  $E_2$  das próprias placas; eles são

$$E_i = E(\mu_i \neq 0, \mu_j = 0) - E_0$$

$$= \int d^3 \mathbf{x} \, i \lim_{x' \rightarrow x} \left[ \eta^{\mu\nu} \partial_0^2 \Delta G_{\mu\nu}^{(i)}(x', x) + \frac{\mu_1}{2} \delta(x^3 - a_i) \mathcal{P}^{\mu\nu}{}_{0\rho} \partial_0 \partial^{\rho} G_{\mu\nu}(x', x) \right], \quad (5.47)$$

onde  $\Delta G_{\mu\nu}^{(i)}(x', x)$  representa o termo de correção no propagador (5.40), na ausência da placa correspondente a  $\mu_j$ ; isto é,

$$\Delta G_{\mu\nu}^{(1)}(x', x) = \Delta G_{\mu\nu}(x', x; \mu_1, \mu_2 = 0)$$

$$\Delta G_{\mu\nu}^{(2)}(x', x) = \Delta G_{\mu\nu}(x', x; \mu_1 = 0, \mu_2)$$

A energia na qual estamos interessado é  $E_{int} = [E(\mu_1, \mu_2) - E_0] - E_1 - E_2$ . Usando (5.45), (5.46) e (5.47), esta assume a forma,

$$\begin{aligned} E_{int} &= \int d^3 \mathbf{x} \, i \lim_{x' \rightarrow x} \left[ \partial_0^2 \eta^{\mu\nu} \left( \Delta G_{\mu\nu}(x', x; \mu_1, \mu_2) - \Delta G_{\mu\nu}^{(1)}(x', x) - \Delta G_{\mu\nu}^{(2)}(x', x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{2} \delta(x^3 - a_i) \left( \partial_0^2 \eta_{\parallel}^{\mu\nu} - \partial_0 \partial_{\parallel}^{\mu} \eta^{0\nu} \right) \left( \Delta G_{\mu\nu}(x', x) - \Delta G_{\mu\nu}^{(i)}(x', x) \right) \right]. \quad (5.48) \end{aligned}$$

Depois de extensos cálculos, onde devemos fazer uma rotação para o espaço Euclidiano e transformar o resultado para coordenadas esféricas, precisamos ainda de uma última transformação de coordenadas,  $\sigma a \rightarrow u$ , para colocar a expressão acima em uma forma adequada para análise numérica. Dividindo pela área das placas,  $A = \int d^2 \mathbf{x}_{\parallel}$ , o resultado final é o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int} &= \frac{E_{int}}{A} \\ &= \frac{1}{3\pi^2 a^3} \int_0^{\infty} du \, u^4 \left[ -\frac{\mu_1}{2u(4a + u\mu_1)} - \frac{\mu_2}{2u(4a + u\mu_2)} + \frac{(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1 \mu_2}{2a} u \left[ 1 - (1 + u)e^{-2u} \right]}{8uaH(u)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3\pi^2 a^3} \int_0^\infty du u^4 \left[ -\frac{\mu_1^2}{4a(4a + u\mu_1)} - \frac{\mu_2^2}{4a(4a + u\mu_2)} + \frac{(\mu_1^2 + \mu_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)\left(\frac{u}{4a}\mu_1\mu_2\right)}{16a^2 H(u)} \right. \\
& \left. + \frac{\mu_1\mu_2\left(2 - \frac{u}{4a}(\mu_1 + \mu_2)\right)e^{-2u}}{16a^2 H(u)} \right] \tag{5.49}
\end{aligned}$$

onde

$$H(u) = \left(1 + \frac{\mu_1}{4a}u\right) \left(1 + \frac{\mu_2}{4a}u\right) - \frac{\mu_1\mu_2}{16a^2} u^2 \exp(-2u). \tag{5.50}$$

A densidade finita de energia por unidade de área (5.49) é o resultado exato na forma integral para a energia de interação entre espelhos dielétricos uniaxiais, com propriedades eletromagnéticas descritas pelas relações (5.30). Como esperado, no limite  $\mu_1 = \mu_2 \rightarrow \infty$ , essa energia se torna a energia Casimir habitual entre placas condutoras perfeitas. O seu comportamento como uma função da distância  $a$  pode ser visto na Fig.5.2, onde mostramos um gráfico da Eq.(5.49) para três valores diferentes de  $\mu$  quando as placas são iguais; isto é, quando  $\mu = \mu_1 = \mu_2$ . Observe também que, para um valor fixo da distância  $a$ , a energia aumenta monotonicamente quanto  $\mu$  cresce, e que é sempre negativa, caracterizando uma força atrativa.

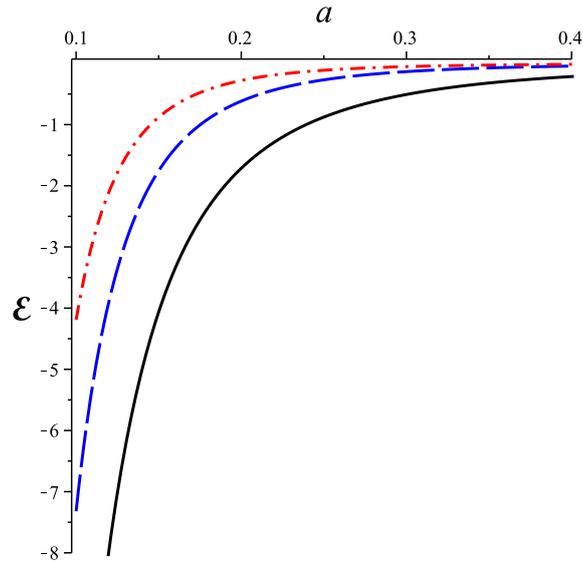


Figura 5.2: Energia de interação como função da distância, Eq.(5.49), para placas similares,  $\mu = \mu_1 = \mu_2$ . Da esquerda para a direita,  $\mu = 0.4$  (linha ponto-traço),  $\mu = 1$  (linha tracejada) e  $\mu \rightarrow \infty$  (linha sólida). Esta última corresponde a condutores perfeitos.

Um fato notável ocorre quando consideramos placas com diferentes valores de  $\mu_i$ . Neste caso, podemos encontrar duas configurações diferentes para as quais suas respectivas curvas, correspondendo às interações entre os espelhos, interceptam uma a outra. Este comportamento pode ser observado na Fig.5.3, onde traçamos a força entre dois conjuntos diferentes de espelhos paralelos, um dos quais tem diferentes valores de  $\mu_i$  para cada placa. Nessa situação, o par de placas similares ( $\mu_1 = \mu_2$ ) tem a interação mais forte em pequenas distâncias, mas uma atração mais fraca do que o conjunto de placas diferentes ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) a distâncias maiores.

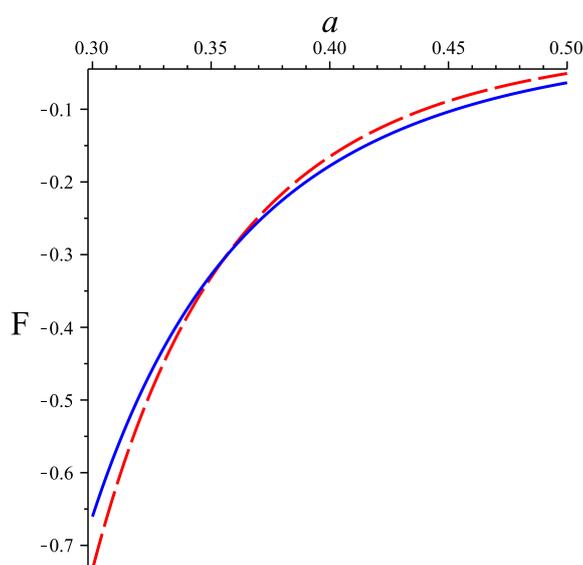


Figura 5.3: A força entre dois pares diferentes de placas como uma função da distância  $a$ , em unidades naturais:  $\mu_1 = \mu_2 = 0.4$  (linha pontilhada= $\mathbf{F}_1$ ),  $\mu_1 = 0.5$  e  $\mu_2 \rightarrow \infty$  (linha sólida= $\mathbf{F}_2$ ).

Este efeito também pode ser compreendido na Fig.5.4, onde traçamos a diferença das forças correspondentes aos dois pares de espelhos na Fig.5.3.

## 5.6 Considerações finais

Como vimos acima, a descrição de fronteiras dielétricas uniaxiais pôde ser formulada com sucesso por meio de potenciais eletromagnéticos. Também mostramos que a modificação no propagador do fóton devido a estas condições de contorno pode ser calculada exatamente, e que este novo propagador se reduz ao correspondente propagador do fóton para espelhos perfeitos,

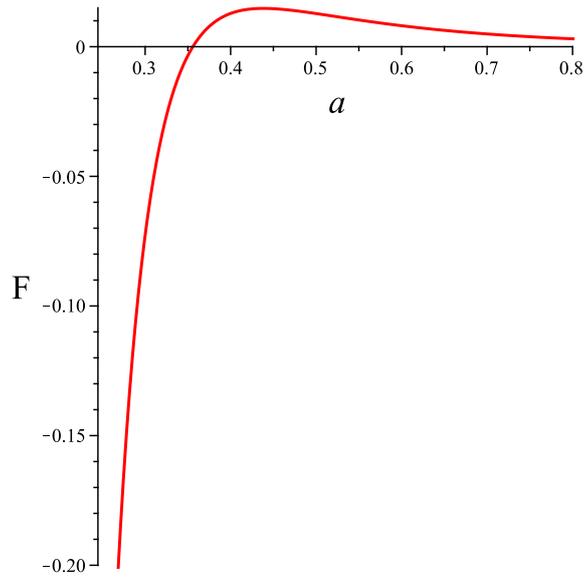


Figura 5.4: The difference of the forces ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ ) between the two pairs of mirrors in Fig.??, as a function of the distance  $a$ .

no limite apropriado. Com a função de Green corrigida, obtivemos a energia de interação entre as placas. A integral descrevendo esta interação não pôde ser resolvida exatamente, mas foi escrita em uma forma adequada para análise numérica. O gráfico da energia como uma função da distância exibiu o comportamento esperado para espelhos semelhantes, e uma particularidade notável para conjuntos de placas diferentes.

Um aspecto não menos importante do método exposto neste capítulo, é que as propriedades eletromagnéticas de cada superfície tipo- $\delta$  são inteiramente descritas por um parâmetro constante, e as únicas variáveis observáveis necessárias para definir completamente esta constante são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do material. Este recurso libera os cálculos de dificuldades relacionadas a modelos específicos, utilizados para descrever cada tipo de material, nos fornecendo um método de cálculo direto.

Além disso, um outro ponto interessante que pode ser levantado a partir destes resultados, é a possibilidade de uma descrição mais abrangente que inclua diferentes materiais por meio de potenciais electromagnéticos. Isso pode ser conseguido com uma generalização do modelo (5.29), de tal maneira que a restrição (5.30) seja excluída. A inclusão de cargas livres no modelo, o que possibilitaria a descrição de condutores com propriedades reais, é outro desafio

que merece atenção, embora neste caso a dispersão relacionada com a condutividade do material possa impor um tratamento muito mais laborioso.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [2] U. Mohideen and A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998); A. Roy and U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
- [3] K. A. Milton, *The Casimir Effect, Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, Singapore (2001).
- [4] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko *Advances in the Casimir Effect*, Oxford Science Publications, Oxford (2009).
- [5] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop, and F. Capasso, Phys. Rev. Lett. **87**, 211801 (2001); H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop, and F. Capasso, Science **291**, 1941 (2001).
- [6] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori and P. Delsing, Nature **479**, 376379 (2011).
- [7] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001); M. Bordag, D. Hennig, and D. Robaschik, J. Phys. A**25**, 4483 (1992).
- [8] M. Bordag, K. Kirsten and D. Vassilevich, Phys. Rev. D **59**, 085011 (1999) [arXiv:hep-th/9811015].
- [9] Kimball A. Milton, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 6391:6406 (2004).

- [10] N. Graham, R.L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, M. Scandurra and H. Weigel, Nucl. Phys. B **645**, 49 (2002) [arXiv:hep-th/0207120]; N. Graham, R.L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, M. Scandurra and H. Weigel, Phys. Lett. B **572**, 196 (2003) [arXiv:hep-th/0207205]; P. Sundberg and R.L. Jaffe, Annals Phys. 309, 442 (2004) [arXiv:hep-th/0308010].
- [11] R.M. Cavalcanti, [arXiv:hep-th/0201150].
- [12] M. Bordag, D. Robaschik and E. Wieczorek, Ann. Phys. (N.Y.) **165**, 192 (1985).
- [13] P. Parashar, K. Milton, K. V. Shajesh and M. Shaden, Phys. Rev. D **86**, 085021 (2012).
- [14] C.D. Fosco, F.C. Lombardo, and F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **85**, 125037 (2012).
- [15] G.T. Camilo, F.A. Barone and F.E. Barone, Phys. Rev. D **87**, 025011 (2013).
- [16] F.A. Barone and G. Flores-Hidalgo, Phys. Rev. D **78**, 125003 (2008).
- [17] F.A. Barone and F.E. Barone, Phys. Rev. D **89**, 065020 (2014).
- [18] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1995).

# Capítulo 6

## Considerações Finais

No primeiro capítulo deste trabalho efetuamos o cálculo da energia potencial entre partículas, em um espaço  $D$ -dimensional, com o emprego de fontes externas tipo- $\delta$ . Também obtivemos uma relação simples que nos permite encontrar a amplitude de Feynman não relativística de forma bastante direta. Dois modelos em particular foram estudados: a eletrodinâmica de Lee-Wick e o modelo dos parafótons. As expressões encontradas nos permitiram concluir que, somente para as dimensões  $D = 2, 3$  e  $4$ , as derivadas de mais alta ordem no modelo de Lee-Wick tornam o potencial finito na origem. No caso dos parafótons, mostramos como generalizar o método para o caso de um duplete de campos e correntes.

Apresentamos abaixo possíveis extensões deste trabalho.

1. Construção de uma prescrição para o cálculo de modelos eletromagnéticos  $D$ - dimensionais a partir dos correspondentes sistemas escalares [1].
2. Limites clássico e quântico para a partícula pesada de Lee-wick [2].
3. Extensão do método abordado no primeiro capítulo para sistemas onde a corrente externa não é conservada [3].

No segundo capítulo construímos uma prescrição, *mutatis mutandis*, semelhante àquela enfocada no primeiro capítulo, para o cálculo do potencial  $D$ -dimensional de modelos gravitacio-

nais. No caso de modelos gravitacionais com derivadas de ordem mais alta em  $D$ -dimensões encontrou-se, utilizando-se este método, que somente em  $D = 4$  a gravidade geral com derivadas de ordem mais alta possui energia finita na origem. Verificamos ainda que dois modelos com parâmetros específicos apresentam a mesma propriedade, os casos nos quais:  $D = 5$  ( $\alpha = -\frac{1}{3}\beta$ ), assim como para  $D = 6$  ( $\alpha = -\frac{5}{6}\beta$ ).

Uma interessante continuação deste trabalho seria extendê-lo para o caso de teorias de ordem superior super-renormalizáveis.

O terceiro capítulo foi dedicado ao estudo da propagação de fótons em um campo gravitacional de fundo, descrito com o modelo geral de gravidade com derivadas de mais alta ordem. Nele ficou demonstrado que esta gravidade produz uma propagação dispersiva dos fótons, e que o processo de espalhamento do fóton é influenciado simultaneamente por uma força atrativa e outra repulsiva. Encontramos também um limite superior para a constante  $\beta$  que é treze ordens de magnitude menor que o limite encontrado previamente na literatura,  $|\beta| < 10^{61}$ . Outro fato interessante mostrado neste capítulo foi que o setor  $R^2$  desta gravidade não contribui para o processo de dispersão.

Seria interessante verificar se os modelos gravitacionais de ordem superior obedecem uma conjuntura que apareceu recentemente na literatura: “Teorias gravitacionais quânticas de ordem superior quadri-dimensionais, são não unitárias e possuem energia potencial finita na origem” [4].

No último capítulo foi proposto um modelo analítico capaz de descrever a interação entre o campo eletromagnético e superfícies dielétricas uniaxiais, por meio do acoplamento de potenciais tipo- $\delta$ , e encontramos os propagadores do fóton corrigidos devido a presença de uma ou duas placas. Verificamos ainda que estes propagadores se reduzem aos bem conhecidos propagadores para espelhos perfeitos, no limite apropriado do parâmetro fenomenológico que caracteriza as propriedades eletromagnéticas dos materiais. Sendo assim, o modelo generaliza ainda mais a descrição de condições de contorno e ao mesmo tempo nos livra das usuais restrições impostas de maneira *ad hoc* sobre os propagadores.

Com as funções de Green corrigidas foi possível calcular a energia de interação entre uma

carga elétrica, descrita por uma fonte externa tipo- $\delta$  e um espelho semitransparente descrito por um potencial tipo- $\delta$ , levando a descrição clássica do método das imagens. Generalizando o modelo para duas placas encontramos a energia de Casimir, que exibiu uma particularidade notável em um sistema composto por duas placas diferentes.

Uma perspectiva interessante é a generalização deste modelo, de forma que seja possível incluir cargas livres no material, possibilitando também a descrição de condutores reais; com condutividade finita. Isso requer a descrição de sistemas dissipativos com métodos analíticos, o que normalmente implica na introdução de lagrangianas que dependem explicitamente do tempo.

Todavia, com a proposta de Galley [5], é possível introduzir um formalismo analítico para sistemas dissipativos com lagrangianas que dependem somente das variáveis dinâmicas e dos momentos generalizados. Depois de seu trabalho, verificou-se que sua proposta para o tratamento de sistemas dissipativos era uma extensão do chamado *Thermalfield Dynamics*, método amplamente empregado no estudo de sistemas a temperatura finita. Nesse formalismo, o espaço de fase deve ser duplicado, com variáveis auxiliares. Após a obtenção das equações de movimento e das quantidades física pertinentes, deve-se tomar o limite destas variáveis tendendo a zero.

Estendendo os métodos expostos aqui com o procedimento de Galley podemos descrever analiticamente tanto condutores como a magnetohidrodinâmica. Para isso, iniciamos com a lagrangiana de Maxwell  $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$ , onde  $A^\mu$  é o campo eletromagnético,  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , o correspondente tensor intensidade de campo e  $J^\mu$  a densidade de corrente. Pelo procedimento de Galley, dobramos agora o espaço de fase, com um novo campo de natureza vetorial  $B^\mu$ , e seu correspondente tensor intensidade de campo  $V^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu$ . A lagrangiana para o novo sistema será

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + J^\mu V_\mu + \Delta\mathcal{L} \quad (6.1)$$

onde definimos convenientemente,

$$\Delta\mathcal{L} = -\sigma(A^\mu - V^\mu)\frac{F_{\mu\nu} + V_{\mu\nu}}{2}u^\nu, \quad (6.2)$$

sendo  $\sigma$  um parâmetro de natureza escalar e  $u^\nu$  um quadrivetor cuja interpretação será esclarecida mais adiante.

Com as definições

$$\begin{aligned} R^\mu &= A^\mu - V^\mu, & S^\mu &= \frac{A^\mu + V^\mu}{2} \\ R^{\mu\nu} &= \partial^\mu R^\nu - \partial^\nu R^\mu, & S^{\mu\nu} &= \partial^\mu S^\nu - \partial^\nu S^\mu \end{aligned} \quad (6.3)$$

podemos escrever a equação (6.1) na forma compacta

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}R^{\mu\nu}S_{\mu\nu} - \sigma R^\mu S_{\mu\nu}u^\nu \quad (6.4)$$

Pelo procedimento de Galley, podemos aplicar a equação de Euler-Lagrange em (6.1) tanto nas variáveis  $A^\mu$  quanto nas variáveis  $V^\mu$  e depois tomar o limite  $V^\mu \rightarrow A^\mu$ . O resultado, em ambos os casos, é

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta + \sigma F^\beta_\nu u^\nu \quad (6.5)$$

Podemos também tomar a equação de Euler-Lagrange em (6.4) para a variável  $R^\mu$ , o resultado é o mesmo, ou seja, a equação (6.5)

Se considerarmos um referencial no qual  $\sigma$  é constante e uniforme e  $u^\mu = \eta^\mu_0$ , obtemos

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta + \sigma F^\beta_0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = J^0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \quad (6.6)$$

que são as equações de Maxwell em um meio condutor estacionário, de condutividade  $\sigma$ .

No caso geral, para um vetor  $u^\mu$  qualquer, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = J^0 + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (6.7)$$

Podemos assim interpretar  $\sigma$  como sendo a condutividade de um meio material e  $u^\mu$  como sendo a quadrivelocidade de um elemento infinitesimal desse meio. Quando o meio está em repouso, a quadrivelocidade de qualquer elemento é  $u^\mu = \eta^{\mu 0}$ , e temos a conhecida situação descrita em (6.6). Quando o meio está em movimento, temos o caso descrito por (6.7). Se o meio está em movimento como um todo,  $\mathbf{u}$  terá o mesmo valor em todos os pontos do espaço. Se cada elemento infinitesimal estiver com uma velocidade diferente,  $\mathbf{u}$  dependerá de posição.

As equações da magnetohidrodinâmica podem ser obtidas combinando-se as equações (6.7). Tomamos inicialmente o rotacional da segunda delas, usamos o fato de que  $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$  e as equações de Maxwell sem fontes, de modo a escrever

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} + \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{J} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (6.8)$$

Na ausência de fontes externas, temos que  $\mathbf{J} = 0$ . Para campos que não variam muito com o tempo, podemos aproximar  $\partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2 \cong 0$  e escrever

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6.9)$$

que é a bem conhecida equação da magnetohidrodinâmica.

Se for possível aplicar o mesmo método utilizado na obtenção do propagador dos parafótons no duplete descrito em (1), em conjunto com fontes e potenciais externos tipo- $\delta$ , alcançaremos uma descrição muito abrangente de sistemas dissipativos em interação com o campo eletromagnético.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, J. Helaël-Neto, G. Correia, G. Brito, J. de Almeida, W. Herdy, *Interparticle potential energy for  $D$ -dimensional electromagnetic models from the corresponding scalar ones* (submitted to Phys. Rev. D).
- [2] A. Accioly *et al.* (work in progress).
- [3] A. Accioly *et al.* (work in progress).
- [4] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, R. Turcati, Int. J. Mod. Phys. D **22**, 1342015 (2013) (honorable mention in the 2013 essay competition of the Gravity Research Foundation).
- [5] C. Galley, Phys. Rev. Lett. **110**, 174301 (2013)